

## TEORÍA DE JUEGOS Y APLICACIONES

Universitat Pompeu Fabra – Examen Final especial, diciembre 1999

Profesor: Antonio Cabrales

1. La autoridad fiscal Raciolandia tenía el siguiente problema. La inspección fiscal está tan desarrollada que cualquier infractor es detectado. Sin embargo, los jueces están tan cargados de trabajo que sólo pueden juzgar y castigar a un evasor de impuestos cada año, y las infracciones fiscales que no se juzguen al año siguiente de cometerse no se pueden castigar. Hasta ahora el sistema determinaba por sorteo quién era juzgado. Lamentablemente, la probabilidad de ser castigado era tan baja que todo el mundo evadía los impuestos. La consultora del gobierno, *DIA* (Diseño Institucional Activo), recomendó que en lugar de juzgar a la gente por sorteo se la juzgara por orden alfabético. Al año siguiente no hubo ni un solo evasor.
  - (a) Explica por qué hubo este cambio tan grande de actitud de la gente. ¿Habría alguna otra regla que produjera el mismo resultado?
  - (b) ¿Crees que el resultado de Raciolandia es exportable a un país real? Si la respuesta es que no, ¿qué podría fallar?
2. El precio del agua mineral tiene la forma  $ce^{-S}$ , donde  $S$  es la cantidad total que se vende de ese bien en el mercado. Hay  $n$  posibles vendedores que no tienen que pagar nada por producir ese bien. Cada uno escoge una cantidad para vender  $x_i$ . El beneficio del vendedor  $i$  es pues,  $\pi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i e^{-\sum_{j=1}^n x_j}$ .
  - (a) En este juego existe una estrategia para cada jugador que domina estrictamente a todas las demás. Identifícala y prueba que todas las demás estrategias están estrictamente dominadas por ella.
  - (b) Prueba que si todos los jugadores juegan la estrategia dominante, están jugando un equilibrio de Nash, y que cualquier otro perfil de estrategias no es un equilibrio de Nash.
3. *Honor entre ladrones.* Supón que dos sospechosos se enfrentan al dilema de los presos, con la complicación añadida de que un sospechoso no sabe si el otro es un hombre de honor. Se sabe que el sospechoso 1 es un hombre sin honor con seguridad, pero no está claro que el sospechoso 2 lo sea o no. Si el sospechoso 2 es un hombre si honor, los pagos tienen la forma habitual en este juego:

		Sospechoso 2	
		<i>Confesar</i>	<i>No Confesar</i>
Sospechoso 1	<i>Confesar</i>	1, 1	15, 0
	<i>No Confesar</i>	0, 15	10, 10

Por el contrario si el sospechoso 2 es un hombre de honor, éste preferiría pasar 20 años en la cárcel antes que delatar a su colega. Más aún, incluso al sospechoso 1 le sabría mal delatar a alguien tan honrado. Por tanto, si el sospechoso 2 es un hombre de honor los pagos son:

		Sospechoso 2	
		<i>Confesar</i>	<i>No Confesar</i>
Sospechoso 1	<i>Confesar</i>	1, 1	5, 20
	<i>No Confesar</i>	0, 15	10, 30

La probabilidad de que el sospechoso 2 sea un hombre de honor es igual a  $\rho$ ,  $0 < \rho < 1$ .

- (a) ¿ Cuáles son los pagos del jugador 2 en el juego de información incompleta (recuerda que puede hacer su estrategia condicional a su tipo)?
  - (b) Identifica las estrategias estrictamente dominadas para el jugador 2 en el juego de información incompleta.
  - (c) Identifica los equilibrios de Nash de este juego para  $\rho = 0.1$  y para  $\rho = 0.9$ .
4. Este es un juego con horizonte infinito entre una profesora y una sucesión infinita de alumnas, cada una de las cuáles pasa un período bajo la tutela de esta profesora. En cada período, la alumna que está bajo la tutela de esa profesora decide si esforzarse y aprender, o no esforzarse y no aprender nada. La profesora puede aprobar a esa alumna o suspenderla, una vez ha observado si la alumna aprendió.
- Si aprueba, la alumna recibe un salario de 10, y si no aprueba recibe un salario de 5. El coste para la alumna de esforzarse es de 3. La utilidad de la alumna es su salario, menos su coste de esforzarse en el caso de que lo haga. Si la alumna aprende, la profesora recibe una compensación de 8, y si no aprende recibe una compensación de 0. El coste para la profesora de aprobar a la alumna es de 0, tanto si aprende como si no. El coste para la profesora de no aprobar a la alumna es de 4 (las alumnas suspensas van a llorar a la profesora, que es muy sensible y sufre mucho al verlas). La utilidad de la profesora es su compensación menos su coste.
- (a) Representa el juego de una etapa en forma extensiva.
  - (b) Busca el único equilibrio perfecto en subjuegos del juego de una etapa.
  - (c) Si el juego se repite infinitamente, busca el tipo de descuento  $\delta$  más pequeño para el que existe un equilibrio perfecto en subjuegos en el que todas las alumnas estudian, y describe las estrategias utilizadas en este equilibrio por los dos jugadores.