Teoria dos conjuntos: Exercícios 3.

1. Demonstrar que os seguintes são equivalentes do axioma de escolha.
   (a) Se $f : y \longrightarrow x$ é uma sobrejeção, então existe uma função $g : x \longrightarrow y$ tal que $g(f(z)) = z$ para todos $z \in y$.
   (b) Para qualquer conjunto x dos conjuntos não vazios existe um conjunto transversal t, *i.e.*, um conjunto $t \subseteq \bigcup x$ tal que $\forall y \in x\ \overline{\overline{y \cap t}} = 1$.
   (c) Para qualquer x, y ou existe uma injeção do x para y, ou existe uma injeção do y para x.
   (d) $\mathbf{m} \,.\, \mathbf{m} = \mathbf{m}$ para qualquer cardinal $\mathbf{m}$. (Pista: se x é um conjunto considerar os cardinalidades do x e o conjunto dado pelo aplicando o Lema de Hartog para x, *i.e.*, $\{\alpha \in \mathrm{On} \mid \alpha \prec x\}$.)

2. Use equivalentes do axioma da escolha para monstrar os seguintes.
   (a) Qualquer ordem parcial sobre um conjunto pode ser estendido para uma ordem total sobre o conjunto.
   (b) Qualquer espaço vetorial tem uma base.
   (c) Quaisquer duas bases dum espaço vetorial tem a mesmo cardinalidade.
   (d) Qualquer campo pode ser embutido num campo álgebraicamente fechado.
   (e) Qualquer produto de espaços topologicos compactos é compacto.
   (e) Existe um conjunto dos reais que não é medidável no sentido de Lebesgue.

3. O axioma de escolha é usado mostrar:
   (a) Qualquer conjunto não finito tem um subconjunto enumerável?
   (b) Um união de um conjunto enumerável dos conjuntos que são enumeráveis é enumerável? Se sim, explicar como.

4. Para qualquer x vamos escrever $\mathcal{P}_{<\omega}(x)$ para o conjunto dos subconjuntos de x que são finitos. Mostre que se x é infinito, então $x \sim \mathcal{P}_{<\omega}$. Tem conjuntos x para qual você não precisa do axioma de escolha para mostrar isso?

5. (a) Mostre que $(\aleph_{\alpha+1})^{\aleph_\beta} = (\aleph_\alpha)^{\aleph_\beta} . \aleph_{\alpha+1}$ para qualquer $\alpha, \beta \in \mathrm{On}$. (Pista: Considerar os casos $\alpha \leq \beta$ e $\beta < \alpha$ individualmente.)
   (b) Deduzir que $(\aleph_n)^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta} . \aleph_n$ para qualquer $n \in \omega$.
   (c) Quando é $(\aleph_\omega)^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta} . \aleph_\omega$?

6. (a) Seja I um conjunto e sejam $\{X_i \mid i \in I\}$ e $\{Y_i \mid i \in I\}$ conjuntos tal que não existe uma sobrejeção do X_i para Y_i para qualquer $i \in I$. Mostre que nao existe uma sobrejeção do $\bigcup\{X_i \mid i \in I\}$ para $\Pi\{Y_i \mid i \in I\}$. Deduzir que se κ é um cardinal e $\{\mu_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ e $\{\nu_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ são conjuntos dos cardinais tal que $\mu_\alpha < \nu_\alpha$ para todos $\alpha < \kappa$, então temos que $\Sigma\{\mu_\alpha \mid \alpha < \kappa\} < \Pi\{\mu_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$.
   (b) Mostre que qualquer cardinal κ é a soma de $\mathrm{cf}(\kappa)$ cardinais cada um com cardinalidade menos que κ, e logo que $\kappa < \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$.

7. Mostrar que se κ é regular e $2^\mu \leq \kappa$ para todos $\mu < \kappa$, então $\Sigma\{\kappa^\mu \mid \mu < \kappa\} = \kappa$.

8. Mosrar que $2^{\aleph_1} = \aleph_2$ implica que $\aleph_\omega^{\aleph_0} \neq \aleph_{\omega_1}$.