Teoria dos conjuntos

Charles Morgan*

Capítulo 5. Combinátoria infinita.

5.1. Conjunto fechados e ilimitado e conjuntos parados.

Definição. Seja λ um ordinal do tipo limite. Um conjunto $D \subseteq \lambda$ é *ilimitado no* λ se $\forall \alpha < \lambda$ $\exists \beta \in D\, \alpha < \beta$. Um conjunto $C \subseteq \lambda$ é *fechado no* λ se para todos ordinais $\delta < \lambda$ do tipo limite, $C \cap \delta$ é ilimitado no δ implica que $\sup(C \cap \delta) \in C$. Um conjunto que é fechado e ilimitado no λ é muitos vezes chamado "club" em inglês ("club" quer dizer "closed and unbounded.")

Exemplos. $\{\gamma < \lambda \mid \gamma$ é um ordinal do tipo limite$\}$ e $\{\gamma < \lambda \mid \gamma$ é um limite dos ordinais do tipo limite$\}$ são fechado no λ. E são ilimitados se λ é um cardinal.

Você deveria pensar de um conjunto fechado e ilimitado como sendo "grande" em alguma sentido.

Proposição. Seja κ um cardinal regular e $\mathcal{F}$ um conjunto de funções finitárias sobre κ com $\overline{\overline{\mathcal{F}}} < \kappa$ (*i.e.*, se $f \in \mathcal{F}$ temos que $f : {}^{n(f)}\kappa \longrightarrow \kappa$ para alguma $n(f) < \omega$.) Então, $C = \{\gamma < \kappa \mid \forall f \in \mathcal{F}\ f``{}^{n(f)}\gamma \subseteq \gamma\}$ é fechado e ilimitado.

Demonstração. É claro que C é fechado: se $\lambda < \kappa$ é um ordinal do tipo limite e $C \cap \lambda$ é ilimitado, $f \in \mathcal{F}$, $f : {}^{n(f)}\kappa \longrightarrow \kappa$ e $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) \in {}^{n(f)}\lambda$ então existe um $\gamma \in (C \cap \lambda) \setminus \max(\{\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}\})$, e temos que $f(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) < \gamma < \lambda$.

Para ver que C é ilimitado, defina $G_0(X) = X$, $G_{n+1}(X) = G_n(X) \cup \bigcup\{\beta \mid \exists \alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1} \in G_n(X)$ $\exists f \in \mathcal{F}\ f(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) = \beta\}$, para cada, $n < \omega$ e $G(X) = \bigcup_{n \in \omega} G_n(X)$ para cada subconjunto X do κ. Se $\xi < \kappa$ é claro que $\xi \subseteq G(\xi) \subseteq \kappa$ e $\overline{\overline{G(\xi)}} < \kappa$. Porque κ é regular podemos escolhar $g(\xi) = \min(\kappa \setminus \sup(G(\xi)))$. Seja $g_{n+1}(\xi) = g(g_n(\xi))$ para qualquer $\xi < \kappa$, e seja $g_\omega(\xi) = \sup\{g_n(\xi) \mid n \in \omega\}$. Então temos que $g_\omega(\xi) \in C$ e $\xi < g_\omega(\xi)$.

Definição. Se C é um conjunto fechado e ilimitado e $g : \kappa \longrightarrow C$ enumera C na ordem crescente, seja $C' = g``\{\omega\gamma \mid \gamma < \kappa\}$. C', $\subseteq C$, é o *conjunto do puntos do tipo limite de* C.

Lema. Seja C é um conjunto fechado e ilimitado e define $f : \kappa \longrightarrow \kappa$ pelo $f(\gamma) = \min(C \setminus (\gamma + 1))$. Então $C' = \{\gamma < \kappa \mid f``\gamma \subseteq \gamma\}$, e logo C' é fechado e ilimitado.

Demonstração. É claro que $C' = \{\gamma < \kappa \mid f``\gamma \subseteq \gamma\}$, e, então, pela proposição prévia, é fechado e ilimitado.

Proposição. Seja κ um cardinal com $\omega < \mathrm{cf}(\kappa)$, seja $\mu < \mathrm{cf}(\kappa)$, e seja C_α fechado e ilimitado no κ para cada $\alpha < \mu$. Então $D = \bigcap\{C_\alpha \mid \alpha < \mu\}$ é fechado e ilimitado no κ.

* versão 1.2, 19/12/00

Demonstração. É facil ver que D é fechado. Agora seja $f_\alpha(\gamma) = \min(C_\alpha \setminus \gamma + 1)$ para $\gamma < \kappa$ e para todos $\alpha < \mu$. D é ilimitado porque, pela proposição prévia, $\{\gamma < \kappa \mid \forall\alpha < \mu\, f_\alpha``\gamma \subseteq \gamma\}$ é ilimitado (e fechado), e é um subconjunto do D pela lema.

Definição. Seja κ um cardinal com $\omega < \mathrm{cf}\,(\kappa)$. Un conjunto $S \subseteq \kappa$ é *parado* se $S \cap C \neq \emptyset$ para todos C que são fechado e ilimitado no κ. Un conjunto $X \subseteq \kappa$ é *não-parado* se não é parado.

Exemplos. A proposição fala que qualquer união do menos que $\mathrm{cf}\,(\kappa)$ conjuntos não-parados é não parado. Seja $\mu < \mathrm{cf}\,(\kappa)$ um cardinal do tipo regular. Então $\{\alpha < \kappa \mid \mathrm{cf}\,(\alpha) = \mu\}$ é parado, porque se C é fechado e ilimitado no κ o elemento μ^o na enumeração crescente do C tem cofinalidade μ.

Conjuntos parados são do tamanho "medio" como subconjuntos do κ e conjuntos não-parados são "pequenos" – não obstante podem ter cardinalidade κ.

Proposição. Seja $\kappa = \mu^+$ e S parado no κ. Então existe S_α para $\alpha < \kappa$ com $S = \bigcup\{S_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ e $S_\alpha \cap S_\beta = \emptyset$ para cada par α, $\beta < \kappa$ com $\alpha \neq \beta$.

Demonstração. Seja $f_\gamma : \gamma \longrightarrow \mu$ uma injeção para cada $\gamma < \kappa$. Defina $S^\xi_\alpha = \{\gamma \mid \alpha < \gamma < \kappa \;\&\; f_\gamma(\alpha) = \xi\} \subseteq \kappa$. Então $S^\xi_\alpha \cap S^\xi_\beta = \emptyset$ se $\alpha \neq \beta$ para cada $\xi < \mu$ porque cada f_γ é uma injeção. Também temos que $\bigcup_{\xi<\mu} S^\xi_\alpha = \{\gamma \mid \alpha < \gamma < \kappa\}$ é parado no κ. Porque uma união do menos que κ subconjuntos do κ não-parados é não-parada, deve ser que para cada α existe um $\xi_\alpha < \mu$ tal que $S^{\xi_\alpha}_\alpha$ é parado. Porque $\mu < \kappa$ existe um $\xi < \kappa$ tal que $\overline{\overline{\{\alpha < \kappa \mid \xi = \xi_\alpha\}}} = \kappa$. Seja $A = \{\alpha < \kappa \mid \xi = \xi_\alpha\}$ é $\alpha_0 = \min(A)$. Defina $S_\alpha = S^\xi_\alpha$ para $\alpha \in A \setminus \{\alpha_0\}$, e defina $S_{\alpha_0} = S \setminus \bigcup\{S^\xi_\alpha \mid \alpha \in A \setminus \{\alpha_0\}\}$ (logo $S^\xi_{\alpha_0} \subseteq S_{\alpha_0}$). Temos que $S_\alpha \subseteq S$ é parado para cada $\alpha \in A$ e $S_\alpha \neq S_\beta$ onde $\alpha, \beta \in A$ e $\alpha \neq \beta$.

Fato. Com um pouco mais trabalho podemos mostrar a proposição para todos cardinais regulares e não só para cardinais do tipo sucessor como cá.

Proposição. (Intersecções diagonais) Seja κ um cardinal do tipo regular e seja C_α fechado e ilimitado no κ para cada $\alpha < \kappa$. Então $D = \{\beta \mid \forall\alpha < \beta\, (\beta \in C_\alpha)\}$ $(= \{\beta \mid \beta \in \bigcap_{\alpha<\beta} C_\alpha)\})$ é fechado e ilimitado no κ.

Demonstração. É facil ver que D é fechado: se λ é um ordinal do tipo limite e $D \cap \lambda$ é ilimitado no λ temos que $\forall\alpha < \lambda\, \exists\beta\, (\alpha \leq \beta < \lambda \;\&\; \forall\gamma < \beta\, \beta \in C_\gamma)$. Logo $\forall\alpha < \lambda\, \exists\beta\, (\alpha \leq \beta < \lambda \;\&\; \beta \in C_\alpha)$. Logo $C_\alpha \cap \lambda$ é ilimitado no λ para todos $\alpha < \lambda$. Então $\lambda \in \bigcap\{C_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$.

Para ver que D é ilimitado, defina $g(\gamma) = \min(\bigcap_{\alpha<\gamma} C_\alpha \setminus \gamma)$ para todos $\gamma < \kappa$. (Nota que esta intersecção é ilimitada pela proposição que uma intersecção de menos que κ conjuntos fechados e ilimitados é fechado e ilimitado, então $g(\gamma)$ é bem-definido.) Agora sejam $\beta < \kappa$, $\beta_0 = \beta$, $\beta_{n+1} = g(\beta_n)$ para $n < \omega$, e $\beta_\omega = \sup\{\beta_n \mid n < \omega\}$. Então $\beta_\omega \in D$.

Proposição. *(Lema de Fodor)* Seja κ regular, $\omega < \kappa$, seja S um subconjunto parado do κ e seja $f : S \longrightarrow \kappa$ tal que $f(\alpha) \in \alpha$ para cada $\alpha \in S$. Então existe $\gamma < \kappa$ tal que $\{\alpha \in S \mid f(\alpha) = \gamma\}$ é parado no κ.

Demonstração. Se a conclusão fale, escolhar para cada $\gamma \in \kappa$ um conjunto C_γ que é fechado e ilimitado no κ e tal que $C_\gamma \cap f^{-1}``\{\gamma\} = \emptyset$. Seja $D = \{\beta \mid \forall\gamma < \beta\, (\beta \in C_\gamma)\}$. A proposição prévia fala que D é fechado e ilimitado no κ. Mas $D \cap S = \emptyset$, porque se $\beta \in D$ temos que $f(\beta) \neq \alpha$ para cada $\alpha < \beta$. Uma contradição para a suposição que S é parado.

5.2 Teorema de Silver.

Agora vamos utilisar estes conceitos dos conjuntos fechados e ilimitados e dos conjuntos parados para mostrar o teorema de Silver sobre exponenciação nos cardinais sigulares com cofinalidade maior que ω que foi mencionado no fim da §4.4. É útil ter mais uma definição.

Definição. Seja $\mathcal{F} \subseteq {}^{\omega_1}\omega_{\omega_1}$ chamado *(uma família) diferente finalmente* se $\forall f,\, g \in \mathcal{F}\, (f \neq g \longrightarrow \overline{\overline{\{\,\alpha \mid f(\alpha) = g(\alpha)\,\}}} \leq \omega$.

Teorema. (Silver, 1975) Se $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ para todos $\alpha < \omega_1$, então $2^{\aleph_{\omega_1}} = \aleph_{\omega_1+1}$

Demonstração. Pelo hipotese da teorema, suphonamos que $\mathcal{P}(\omega_\alpha) = \{\, X^\alpha_\beta \mid \beta < \omega_{\alpha+1}\,\}$ para todos $\alpha < \omega_1$. Então para cada $X \subseteq \omega_{\omega_1}$ e $\alpha < \omega_1$ existe uma $\beta < \omega_{\alpha+1}$ tal que $X \cap \omega_\alpha = X^\alpha_\beta$. Logo podemos definir para cada $X \subseteq \omega_{\omega_1}$ uma função $f_X : \omega_1 \longrightarrow \omega_{\omega_1}$ pelo $f_X(\alpha) = \beta$ se $X \cap \omega_\alpha = X^\alpha_\beta$ tal que $f_X(\alpha) < \omega_{\alpha+1}$. Nota que $\mathcal{F} = \{\, f_X \mid X \in \mathcal{P}(\omega_{\omega_1})\,\}$ é diferente finalmente porque $X \neq Y$ implica que existe $\alpha < \omega_1$ tal que $f_X(\alpha) \neq f_Y(\alpha)$, e $f_X(\alpha) \neq f_Y(\alpha)$ implica $f_X(\gamma) \neq f_Y(\gamma)$ para cada $\gamma \geq \alpha$.

Agora dar uma ordem parcial para $\mathcal{F}$ pelo $f < g$ se e só se $\{\alpha < \omega_1 \mid g(\alpha) \leq f(\alpha)\}$ é um conjunto não-parado no ω_1. Pelo o lema de Zorn seja $\prec$ qualquer ordem total que estende $<$. (Veja Exercício 3.2.a.) Logo se $f \prec g$ temos que $\{\,\alpha < \omega_1 \mid f(\alpha) < g(\alpha)\,\}$ é um parado no ω_1. Seja $\mathcal{F}_g = \{\, f \in \mathcal{F} \mid f \prec g\,\}$. Vamos mostrar que $\overline{\overline{\mathcal{F}_g}} \leq \omega_{\omega_1}$ para cada $g \in \mathcal{F}$, que dará a teorema.

Para fazer isso vamos usar duas lemas.

Lema. Se $\mathcal{G}$ é diferente finalmente e $\forall g \in \mathcal{G}\, \{\,\alpha \mid g(\alpha) < \omega_\alpha\,\}$ é parado, então $\overline{\overline{\mathcal{G}}} \leq \omega_{\omega_1}$.

Demonstração. Suphonamos que $f \in \mathcal{G}$. Seja $g : \{\alpha < \omega_1 \mid \alpha = \bigcup \alpha\} \longrightarrow \omega_1$ definido pelo $g(\alpha) =$ o mínimo $\gamma < \alpha$ tal que $f(\alpha) < \kappa_\gamma$. Pela lema de Fodor existe um subconjunto parado S_f de $\{\alpha < \omega_1 \mid \alpha = \bigcup \alpha\}$ e um $\gamma_f < \omega_1$ tal que $g(\alpha) = \gamma_f$ para todos $\alpha \in S_f$. Logo, se $\omega_{\omega_1} < \overline{\overline{\mathcal{G}}}$ existe um subconjunto $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G}$, um $\gamma < \omega_1$, um conjunto parado $S \subseteq \omega_1$ tal que $\omega_{\omega_1} < \overline{\overline{\mathcal{G}'}}$ e $\forall f \in \mathcal{G}'\, (\gamma_f, S_f) = (\gamma, S)$. Porque $\mathcal{G}$ é diferente finalmente deve ser que $\forall f,\, g \in \mathcal{G}'$ $(f \neq g \longrightarrow f|S \neq g|S)$. Mas temos $\overline{\overline{{}^S\omega_\gamma}} = \omega_\gamma^{\omega_1} \leq \max(\{\omega_\gamma^{\omega_\gamma},\, {\omega_1}^{\omega_1}\}) = \max(\{\,2^{\omega_\gamma},\, 2^{\omega_1}\,\}) = \max(\{\,\omega_\gamma^+,\, \omega_2\,\}) \leq \kappa$. Uma contradição! Então $\overline{\overline{\mathcal{G}}} \leq \kappa$, como desejamos.

O outro lema reduze crumente o que ficar da demonstração para a situação desta lema última.

Lema. Se $f : \omega_1 \longrightarrow \omega_{\omega_1}$ é tal que $f(\alpha) < \omega_{\alpha+1}$ para cada $\alpha \in \omega_1$, $\mathcal{G}$ é diferente finalmente e $\forall g \in \mathcal{G}\, \{\,\alpha \mid g(\alpha) < f(\alpha)\,\}$ é parado, então $\overline{\overline{\mathcal{G}}} \leq \omega_{\omega_1}$.

Demonstração. Para cada $\alpha < \omega$ seja $h_\alpha : f(\alpha) \longrightarrow \omega_\alpha$ uma injeção. Para cada $g \in \mathcal{G}$ defina $g' : \omega_1 \longrightarrow \omega_{\omega_1}$ pelo $g'(\alpha) = h_\alpha(g(\alpha))$ e seja $\mathcal{G}' = \{\, g' \mid g \in \mathcal{G}\,\}$. Então $\mathcal{G}'$ satisfaz o hipotese da lema prévia. Mas porque todos as funções h_α são injeções, $g' = k' \longrightarrow g = k$. Então $\overline{\overline{\mathcal{G}'}} = \overline{\overline{\mathcal{G}'}} \leq \omega_{\omega_1}$.

Então $\overline{\overline{\mathcal{F}_g}} \leq \omega_{\omega_1}$ para cada $g \in \mathcal{F}$, e, logo, $\overline{\overline{\mathcal{F}}} \leq \omega_{\omega_1+1}$. Então $\overline{\overline{\mathcal{F}}} = 2^{\omega_{\omega_1}} = \omega_{\omega_1+1}$.

Corolário para a demonstração. Seja κ um cardinal do tipo limite e singular com $\mathrm{cf}(\kappa) = \theta < \kappa$ e $c : \theta \longrightarrow \kappa$ cofinal. Se existe um subconjunto parado $T \subseteq \theta$ tal que $2^{c(\mu)} = c(\mu)^+$ para todos $\mu < \theta$, então $2^\kappa = \kappa^+$.

5.3. Teorema de Ramsey.

Vamos ver na seção proxima um outro uso das noções dos conjuntos fechados e ilimitados e conjuntos parados. Este aplicação será na teoria dos grafos.

Definição. Um *grafo* é um par (X, A) onde X é um conjunto (dos *vértices* ou *nós*) e onde $A \subseteq X \times X \setminus \{ (x, x) \mid x \in X \}$ (dos *arestes*). Um outro modo de falar a mesma coisa é falar que um grafo é um conjunto X com uma relação binária A tal que A é símetrico e anti-reflexivo.[1] Somos interesados nos grafos só até isomorfismo onde $(X, A) \cong (Y, B)$ se existe uma bijeção $f : X \longrightarrow Y$ tal que $(x, y) \in A \iff (f(x), f(y)) \in B$.

Tem muitos exemplos dos grafos, do dois finitos e infinitos. Entre eles são grafos *completos*: grafos da forma (X, B) onde para cada par $\{x, y\}$ dos membros do X com $x \neq y$ tem $(x, y) \in B$. Escrevemos K_κ para o grafo completo do tamanho κ. (Claro que é único até isomorfismo.) Por exemplo, temos que K_3 é um triangulo e K_4 é um quadro com os diagonais.

Definição. $H = (Y, B)$ é um subgrafo do $G = (X, A)$ se $Y \subseteq X$ e $B = A \cap (Y \times Y)$. Então H tem todos os arestes que G tem entre vértices no Y.

Definição. Uma *coloração* de um grafo $G = (X, A)$ *com* γ *cores* é uma função $f : A \longrightarrow \gamma$.

A teorema do Ramsey na forma o mais simples fala que para qualquer coloração finita f do grafo infinito enumerável K_ω existe um subgrafo $G = (X, A)$ do K_ω tal que $G \cong K_\omega$ é todos os arestes do G tem o mesmo cor: $\overline{\overline{\{ f(e) \mid e \in A \}}} = 1$. Falamos que G é *monocromático.* Tem, também um versão finito da teorema que pode, deduzir deste versão infinito: para qualquer $n < \omega$ e $r < \omega$ existe $m < \omega$ tal que para qualquer coloração f do K_m existe um subgrafo G do K_m tal que $G \cong K_n$. Na verdade vale a pena mostrar uma extensão pequena da teorema que tem mas ou menos a mesma demonstração.

Definição. Para qualquer conjunto x e qualquer cardinal κ seja $[x]^\kappa = \{ y \subseteq x \mid \overline{\overline{y}} = \kappa \}$.

Teorema de Ramsey. (1930) Sejam n, $r < \omega$. Se $f : [\omega]^n \longrightarrow r$, existe $X \in [\omega]^\omega$ (então um subconjunto infinito do ω) e existe um $p < r$ tal que $f``[X]^n = \{p\}$. (*I.e.*, para qualquer coloração do conjunto dos subconjuntos do tamanho n do ω com r cores existe um subconjunto infinito X do ω tal que todos os subconjuntos do X do tamanho r ganham o mesmo cor.)

Primeiramente, observe a lema seguinte que vamos usar várias vezes na demonstração.

Lema. Sejam n, $r < \omega$ e $f : [\omega]^{n+1} \longrightarrow r$. Suponhamos que $Z \in [\omega]^\omega$, $x \in [Z]^n$, e para cada $p < r$ seja $x_p = \{ s \in Z \mid s \notin x \ \& \ f(x \cup \{ s \}) = p \}$. Então ao menos um dos conjuntos x_p é infinito.

[1] Para pegar mais informação sobre a teoria de grafos posso recomendar para você os livros de Bela Bollobas, *Graph Theory: An introductory course*, Springer, 1979 (na biblioteca) ou Bela Bollobas, *Combinatorics*, Cambridge University Press, 1986? (não na biblioteca).

Demonstração da lema. Se cada x_p fosse finito teríamos que $Z \setminus x = \bigcup\{ x_p \mid p < r \}$ seria uma união finita dos conjuntos finitos, logo finito. Uma contradição!

bf Demonstração da teorema de Ramsey. A demonstração é pela indução sobre n. Então o caso primeiro é $n = 1$, e neste caso temos uma $f : [\omega]^1 \longrightarrow r$. Seja $y_p = \{ m \in \omega \mid f(\{ m \}) = p \}$ para cada $p < r$. Então pela lema (ao menos) um dos conjuntos y_p é infinito, como precisamos.

Agora suponhamos que temos mostrado a teorema para n e qualquer $r < \omega$. Sejam $r < \omega$ e $f : [\omega]^{n+1} \longrightarrow r$. Vamos definir uma coloração $g : [\omega]^n \longrightarrow r$ usando f. Então se $x \in [\omega]^n$ seja, usando a lema, $g(x) = p$ se p é mínimo tal que existe um conjunto infinito dos $s < \omega$ tal que $f(x \cup \{ s \}) = p$.

Vamos definir uma seqüência dos conjuntos infinitos X_i para $i < \omega$ com $X_0 = \omega$ e $X_{i+1} \subseteq X_i$ e definir $a_i = \min(X_i)$. Para $i < n$ seja $X_{i+1} = X_i \setminus \{ a_i \}$. Na contramão suphamos que temos $\langle a_i \mid i \leq j \rangle$ e $\langle X_i \mid i \leq j \rangle$ para alguma $n - 1 \leq j < \omega$. Seja $\langle y_k \mid k < l \rangle$ uma enumeração do $[\{ a_i \mid i < j \}]^n$ para alguma $l < \omega$. Vamos definir um conjunto infinito Y_k para $k \leq l$ com $Y_0 = X_j \setminus (a_j + 1)$ e $Y_{k+1} \subseteq Y_k$ e definirimos $X_{j+1} = Y_k$. Seja, pela lema de novo, $q_k < r$ mínimo tal que existe um subconjunto infinito Y do Y_k tal que para todos $b \in Y$ temos que $f(y_k \cup \{ b \}) = q_k$, e seja $Y_{k+1} = \{ b \in Y_k \mid f(y_k \cup \{ b \}) = q_k \}$.

Seja $X = \{ a_i \mid i < \omega \}$. Pelo teorema para n temos que existe um conjunto $Z \in [X]^\omega$ e um cor $q < r$ tal que $g``[Z]^n = \{ q \}$. Vamos mostrar que $\overline{\overline{f``[Z]^{n+1}}} = 1$ também. Sejam x_0, $x_1 \in [Z]^{n+1}$ com $b_0 = \max(x_0)$ e $b_1 = \max(x_1)$, e sejam $y_0 = x_0 \setminus \{ b_0 \}$ e $y_1 = x_1 \setminus \{ b_1 \}$. Então $f(x_0) = g(y_0)$ e $f(x_1) = g(y_1)$. Mas $g(y_0) = g(y_1)$, porque y_0, $y_1 \in [Z]^n$, logo $f(x_0) = f(x_1)$.

5.4. Teorema de Todorcevic.

Embora, para cardinais do tipo sucessor já nos 30s Sierpinski mostrou que a analogia da teorema de Ramsey foi falsa, ao menos sob HCG. Primeiro mostramos um lema que vai ser útil.

Definição. Seja κ um cardinal. A *ordem lexicografico sobre* $\mathcal{P}(\kappa)$ é dado pelo $x < y$ se quando z é mínimo tal que $z \in (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$ temos $z \in y$.

Nota. É claro que $<$ é uma ordem linear. Falamos a ordem lexicografico porque é lexicografico sob o isomorfismo $\chi : \mathcal{P}(\kappa) \longrightarrow {}^\kappa 2$ onde $\chi_x(n) = 1$ se e só se $n \in x$ para $x \in \mathcal{P}(\kappa)$.

Lema. Seja κ um cardinal infinito e seja seja $<$ a ordem lexicografico sobre $\mathcal{P}(\kappa)$. Não existe um subconjunto do $\mathcal{P}(\kappa)$ bem-ordenado pelo $<$ com cardinalidade maior que κ.

Demonstação. Suphamos que $\kappa < \overline{\overline{Y}}$ e $Y \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ é bem-ordenado pelo $<$. Então existe um ordinal ρ tal que $(Y, <) \cong (\rho, \in)$ pelo um isomofismo que preserva ordem e $\kappa^+ \leq \rho$. Seja Y_0 o segmento inicial do Y tal que $(Y_0, <) \cong (\kappa^+, \in)$ pelo um isomofismo g que preserva ordem. Seja γ_α o mínimo $\gamma < \kappa$ tal que $\forall \beta < \alpha\, \gamma_\beta < \gamma$ e existe $x \in Y_\alpha\, \gamma \in x$, seja $Y_{\alpha+1} = \{ x \in Y_\alpha \mid \gamma_\alpha \in x \}$, e seja $Y_\lambda = \bigcap\{ Y_\alpha \mid \alpha < \lambda \}$ para $\lambda < \kappa$ do tipo limite. E seja $a_\alpha \in Y_\alpha$ se $Y_\alpha \neq \emptyset$.

Então a função $f : \beta \longrightarrow Y_0$ definida pelo $f(\alpha) = a_\alpha$ para $\alpha < \beta$ e $\beta = \{ \alpha \mid Y_\alpha \neq \emptyset \}$ é cofinal para Y_0 e temos que $g \cdot f$ mostra $\mathrm{cf}\,(\kappa^+) \leq \mathrm{cf}\,(\beta) \leq \kappa$. Uma contradição!

Proposição. (Sierpinski) Existe uma coloração f do $[\mathcal{P}(\kappa)]^2$ com 2 cores tal que não existe um subconjunto X do $\mathcal{P}(\kappa)$ da cardinalidade maior que κ com $\overline{\overline{f``[X]^2}} = 1$.

Demonstração. Seja $<$ a ordem lexicografico sobre $\mathcal{P}(\kappa)$. Sejam $\prec$ qualquer bem-ordem do $\mathcal{P}(\kappa)$. Defina $f : [\mathcal{P}(\kappa)]^2 \longrightarrow 2$ pelo se $f(\{x,y\}) = 0$ se $x < y$ e $x \prec y$ ou $y < x$ e $y \prec x$ e $f(\{x,y\}) = 1$ se $x < y$ e $y \prec x$ ou $y < x$ e $x \prec y$.

Se $H \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ é tal que $f``[H]^2 = \{0\}$ então $<$ é uma bem-ordem do $H$. E se $H \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ é tal que $f``[H]^2 = \{1\}$ então $\{\kappa \setminus x \mid x \in H\}$ é bem-ordenado pelo $<$. Então, em qualquer caso $\overline{\overline{H}} \leq \kappa$ pela lema.

Definição. Um cardinal κ é *compacto fracamente* se para qualquer coloração f do $[\kappa]^2$ com 2 cores existe um $x \in [\kappa]^\kappa$ tal que $\overline{\overline{f``[x]^\kappa}} = 1$.

Exemplo. ω é compacto fracamente pela teorema de Ramsey.

Proposição. Se κ é compacto fracamente, então κ é inacessível fortemente.

Demonstração. Se κ não é inacessível fortemente ou existe $\mu < \kappa$ tal que $\kappa \leq 2^\mu$ ou κ é singular. Se $\mu < \kappa$ e $\kappa \leq 2^\mu$ temos que existe uma coloração do $[2^\mu]^2$ com 2 cores sem um subconjunto monocromatico do 2^μ do tamanho μ^+ pela teorema de Sierpinski. Mas $\mu^+ \leq \kappa$, então a restrição desta coloração para $[\kappa]^2$ não tem um subconjunto monocromatico do cardinalidade κ.

Se κ é singular, seja $g : \mathrm{cf}(\kappa) \longrightarrow \kappa$ cofinal e cresente estritamente. Defina $f : [\kappa]^2 \longrightarrow 2$ pelo $f(\gamma,\delta) = 0$ se e só se existe $\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)$ tal que $g(\alpha) \leq \gamma$, $\delta < f(\alpha+1)$. Porque para cada $\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)$ temos que $\overline{\overline{\{\gamma < \kappa \mid g(\alpha) \leq \gamma < g(\alpha+1)\}}} < \kappa$, não existe $x \in [\kappa]^\kappa$ tal que $f``[x]^2 = \{0\}$. E não existe $x \in [\kappa]^{\mathrm{cf}(\kappa)^+}$ tal que $f``[x]^2 = \{1\}$.

Muito mais tarde Stevo Todorčević mostrou uma teorema linda que fortelece muito o resultado de Sierpinski. Este teorema servirá como uma outra ilustração do uso conjuntos fechados e ilimitados e de conjuntos parados. (A demonstração que damos aqui é uma variação por Dan Velleman da demonstração de Todorčević.)

Teorema. (Todorčević 1986[2]) Existe uma coloração f do $[\omega_1]^2$ com ω_1 cores tal que $f``[x]^2 = \omega_1$ para cada $x \in [\omega_1]^{\omega_1}$. Em outras palavras, existe uma coloração do K_{ω_1} com ω_1 cores tal que qualquer subgrafo isomorfico para K_{ω_1} deve ter arestes com todos os cores.

Demonstração. Seja $\{r_\alpha \mid \alpha < \omega_1\} \subseteq {}^\omega 2$. Também seja $e_\alpha : \alpha \longrightarrow \omega$ uma injeção para cada $\alpha < \omega_1$. Defina $\sigma(\alpha,\beta) =$ o mínimo $n < \omega$ tal que $r_\alpha(n) \neq r_\beta(n)$ para $\alpha < \beta < \omega$, e seja $f(\alpha,\beta) =$ o mínimo $\delta < \omega_1$ tal que $\alpha \leq \delta < \beta$ e $e_\beta(\delta) \leq \sigma(\alpha,\beta)$ se existe um tal δ, e $= 0$ senão.

Para demonstrar a teorema é bastante mostrar que se $Z \in [\omega_1]^{\omega_1}$, então existe um conjunto C fechado e ilimitado tal que $C \subseteq f``[Z]^2$. Para ver isso lembrar que pelo proposição imediatemente depois da definição do parado temos que existe conjuntos parados $S_i \subseteq \omega_1$ para cada $i < \omega_1$, com

[2] Stevo Todorčević, *Partitioning pairs of countable ordinals*, Acta Mathematica, **159** (1987), pp. 261-294. Este artigo ótimo tem muitos outras coisas extremementes interessantes. Recomendâ-lo muito – e o volume de Acta Mathematica é na biblioteca também!

$\omega_1 = \bigcup\{ S_i \mid i < \omega_1 \}$ e $S_i \cap S_j = \emptyset$ se $i,\, j < \omega_1$ e $i \neq j$. Se definimos $g(\alpha) = i$ se e só se $\alpha \in S_i$ temos que $g \cdot f``[Z]^2 = g``C_Z$ onde C_Z é fechado e ilimitado para cada $Z \in [\omega_1]^{\omega_1}$. Mas para cada $i < \omega_1$ temos que existe $\alpha_i \in S_i \cap C_Z$ porque S_i e parado. Logo se $i < \omega$ existe $\{x, y\} \in [Z]^2$ tal que $f(\{x, y\}) = \alpha$ e $g(\alpha) = i$. Então $g \cdot f$ mostrar a teorema.

Então, seja $Z \in [\omega_1]^{\omega_1}$ e para cada $g \in \bigcup\{ {}^n2 \mid n < \omega \} = {}^{<\omega}2$ seja $B_g = \{ \alpha \in Z \mid g \subseteq r_\alpha \}$. Também seja $C = \{ \delta < \omega_1 \mid \forall g \in {}^{<\omega}2$, ou $B_g \subseteq \delta$ ou $(\overline{\overline{B_g}} = \omega_1\ \&\ \delta = \bigcup(B_g \cap \delta)) \}$. Suponhamos que λ é um ordinal do tipo limite e $\bigcup C \cap \lambda = \lambda$. Se $g \in {}^{<\omega}2$ e $B_g \not\subseteq \lambda$, temos que $B_g \not\subseteq \delta$ para cada $\delta < \lambda$, e, logo, temos $\overline{\overline{B_g}} = \omega_1$, porque $C \cap \lambda \neq \emptyset$, e $\lambda = \bigcup C \cap \lambda = \bigcup(\bigcup\{ B_g \cap \delta \mid \delta \in C \cap \lambda \}) = \bigcup B_g \cap \lambda$. Então C é fechado. Não é difícil ver que C também é ilimitado no ω_1. $\overline{\overline{{}^{<\omega}2}} = \omega$, então existe $\delta < \omega_1$ tal que $\bigcup(\bigcup\{ B_g \mid \overline{\overline{B_g}} < \omega_1 \}) < \delta$. Seja $\{ B_n \mid n < \omega \} = \{ B_g \mid \overline{\overline{B_g}} = \omega_1 \}$. Logo dado $\alpha < \omega_1$ pode escolhar recursivemente $\beta_{\omega.n+m}$ ser o membro mínimo do B_m tal que α, δ, e $\beta_{\omega.n'+m'} < \beta_{\omega.n+m}$ se $n' < n$ ou $n' = n$ e $m' < m$. É claro que $\alpha < \gamma = \bigcup\{ \beta_{\omega.n+m} \mid n,\, m \in \omega \} \in C$. Vamos ver que $C \subseteq f``[Z]^2$.

Suponhamos que $\delta \in C$ e $\beta \in Z$ com $\delta < \beta$. Vamos achar $\alpha \leq \delta$ tal que $f(\alpha, \beta) = \delta$. Seja $n = e_\beta(\delta)$ e $g = r_\beta | n$. Então $\beta \in B_g$, e logo $B_g \not\subseteq \delta$ e temos que $\overline{\overline{B_g}} = \omega_1$.

Para cada $\gamma \in B_g$ tal que $\beta < \gamma$ sejam $m_\gamma = \sigma(\beta, \gamma)$ e $h_\gamma = r_\gamma|(m_\gamma + 1)$. Nota que $h_\gamma|m_\gamma = g|m_\gamma$, mas $h_\gamma(m_\gamma) \neq g(m_\gamma)$. Porque $\overline{\overline{B_g}} = \omega_1$ existe um subconjunto $B \in [B_g]^{\omega_1}$ e existe $m < \omega$ e $h : m \longrightarrow \omega$ tal que $m = m_\gamma$ e $h = h_\gamma$ para cada $\gamma \in B$. Logo $\overline{\overline{B_h}} = \omega_1$ e pela definição do C temos que $\delta = \bigcup \delta \cap B_h$.

Seja $F = \{ \epsilon < \delta \mid e_\beta(\epsilon) \leq m \}$. F é finito porque e_β é uma injeção. Então existe $\alpha \in B_h \cap \delta$ tal que $F \subseteq \alpha$. Agora temos que $\alpha \in B_h$, logo $h \subseteq r_\alpha$, e que $h|m = r_\beta|m$ e $h(m) \neq r_\beta(m)$. Logo $\sigma(\alpha, \beta) = m$. Se $\alpha \leq \epsilon < \delta$ temos que $m < e_\beta(\epsilon)$, mas $e_\beta(\delta) = m$. Logo δ é mínimo tal que $\alpha \leq \delta < \beta$ e $e_\beta(\delta) \leq m$, então $\delta = f(\alpha, \beta)$.

Seria muito interesante ter resultados similares para outro grafos além de K_{ω_1}. Pode ver o artigo recente de András Hajnal e Péter Komjáth, *Some remarks on the simultaneous chromatic number*, (até agora não publicado, mas disponível do Péter Komjáth – kope@cs.elte.hu – pelo internet) para alguma informação sobre este problema da geralização, mas ainda tem muitas oportunidades para melhoramentos do trabalho deles.

Por exemplo, falemos que $G = (X, A)$ tem *número cromático* ω_1 se ω_1 é o cardinal κ mínimo tal que existe $f : \kappa \longrightarrow X$ tal que $f(x) \neq f(y)$ se $\{x, y\} \in A$. É claro que K_{ω_1} tem número cromático ω_1.

O princípio $\diamondsuit^+$ fala que existe $\{ B_{\alpha,n} \mid \alpha < \omega_1\ \&\ n < \omega \}$ tal que $B_{\alpha,n} \subseteq \alpha$ para cada $\alpha < \omega_1$ e $n < \omega$, e se $B \subseteq \omega_1$, então existe um conjunto, C, fechado e ilimitado tal que $\forall \gamma \in C\, \exists n < \omega\ (B \cap \gamma = B_{\gamma,n})$. Então $\diamondsuit^+$ fala que tem um sistema $\{ B_{\alpha,n} \mid \alpha < \omega_1\ \&\ n < \omega \}$ que prediz *qualquer* subconjunto B do ω_1 certamente num grande (fechado e ilimitado) número dos lugares. $\diamondsuit^+$ é uma fortalecendo do (HC), então não demonstraável no ZF (embora que é verdadeiro se $V = L$, por exemple). Ele implica (HC) porque se $x \subseteq \omega$ existe C tal que $\forall \gamma \in C \setminus \omega$ existe $n < \omega$ com $x = x \cap \gamma = B_{\gamma,n}$. Então $2^\omega = \overline{\overline{\mathcal{P}(\omega)}} \leq \overline{\overline{\{ B_{\alpha,n} \mid \alpha < \omega_1\ \&\ n < \omega \}}} = \omega_1$.

Hajnal e Komjáth mostram que $\diamondsuit^+$ implica que se $G = (\omega_1, A)$ tem número cromático ω_1, então existe $f : A \longrightarrow \omega_1$ tal que se $X \in [\omega_1]^{\omega_1}$ e $(X, A \cap (X \times X))$ tem número cromático ω_1 temos que $f``(A \cap (X \times X)) = \omega_1$. Mas ainda esta em aberta se pode mostrar este resultado no ZF + AE, logo geralizando a teorema de Todorčević.