Teoria dos conjuntos

Charles Morgan*

Capítulo 4. Aritmética dos cardinais.

4.1. Noções basicos sobre cardinais.

Somos habitudos comparar o tamanho dos conjuntos pelo vindo se tem uma injeção de um para o outro, ou um bijeção entre os dois.

Definição. Sejam x, y conjuntos. Defina $x \sim y$ se existe $f : x \longrightarrow y$ tal que f é uma bijeção.
Seja $x \preceq y$ se existe uma injeção (uma immersão) do x para y (*i.e.* uma função f tal que para todos z_0, $z_1 \in x$ temos que $f(z_0) = f(z_1) \Longrightarrow z_0 = a_1$).
E seja $x \preceq^* y$ ou se $x = \emptyset$ ou se existe uma sobrejeção do y para x (*i.e.* uma função g tal que para todos $z \in x$ existe $u \in y$ tal que $g(u) = z$).

Nossos dois lemas primeiros são claros.

Lema. Se $x \preceq y$, então $x \preceq^* y$

Demonstração. Se $x = \emptyset$ tem nada mostrar. Senão seja $f : x \longrightarrow y$ uma injeção e seja u qualquer elemento arbitrário do x. Logo, se definimos $g : y \longrightarrow x$ pelo $g(z) = f^{-1}(z)$ se $z \in \mathrm{im}(f)$, e $g(z) = u$ é senão, é claro que g é uma sobrejeção.

Lema. O axioma de escolha implica que se $x \preceq^* y$, então $x \preceq y$.

Demontração. Se $g : y \longrightarrow x$ é uma sobrejeção, seja $s_v = \{u \in y \mid g(u) = v\}$ para todos $v \in x$ e seja $z = \{s_v \mid v \in x\}$. Aplicamos o axioma de escolha para z. Esse dá para nós uma função $f : z \longrightarrow \bigcup z, = y$, tal que $f(s_v) \in s_v$ para todos $s_v \in z$. Logo a função $h : x \longrightarrow y$ definida pelo $h(v) = f(s_v)$ é uma injeção, porque se temos v_0, $v_1 \in x$ e $h(v_0) = h(v_1)$, então $v_0 = g(h(v_0)) = g(h(v_1)) = v_1$.

Nota. Precisamos do axioma de escolha para establecer este fato. Porém, a teorema seguinte não usa o axioma de escolha.

Teorema. (Schröder-Bernstein) Se $x \preceq y$ e $y \preceq x$, então $x \sim y$.

Demonstração. Suponhamos que $i : x \longrightarrow y$ e $j : y \longrightarrow x$ são injeções. Defina $k : \mathcal{P}(x) \longrightarrow \mathcal{P}(x)$ pelo $k(a) = (x \setminus j``y) \cup j{\cdot}i``a$ para cada $a \in x$. É claro que se $a \subseteq b \subseteq x$, então $k(a) \subseteq k(b)$.

Tome $c = \bigcup\{a \subseteq x \mid a \subseteq k(a)\}$. Então $c \subseteq \bigcup\{k(a) \mid a \subseteq x \;\&\; a \subseteq k(a)\} \subseteq k(c)$, porque $a \subseteq k(a) \subseteq k(c)$ quando $a \subseteq c$. Logo $k(c) \subseteq k(k(c))$. Então $k(c) \subseteq c$, e $c = k(c)$. (Nota que

* versão 1.0, 3/12/00

até aqui só usamos que k é cresente sobre $\mathcal{P}(x)$ e nada mais.)

Defina $f : x \longrightarrow y$ pelo $f(u) = i(u)$ se $u \in c$, e $f(u) = j^{-1}(u)$ se $u \notin c$. Sejam $u_0, u_1 \in x$. Se do dois $u_0, u_1 \in c$ é claro que $f(u_0) = f(u_1)$ implica $u_0 = u_1$. Similarmente, se $u_0, u_1 \notin c$ temos que $f(u_0) = f(u_1)$ implica $u_0 = u_1$ também. E se $u_0 \in c$ e $u_1 \notin c$ e $f(u_1) = v$, então $v \notin \mathrm{im}(i)$ e $f(u_0) \neq f(u_1)$. Finalmente, se $v \in y$ e não existe $u \in c$ tal que $f(u) = v$, então $j(v) \notin c$ e $v = f(j(v))$.

Definição. Uma *noção de cardinalidade* é uma Função, $\mathrm{card} : V \longrightarrow V$, tal que $\mathrm{card}(x) = \mathrm{card}(y)$ se e só se $x \sim y$.

Mesmo sem o axioma de esolha existe uns tais noções. Vamos usar um, paraqual escrevemos $\overline{\overline{x}}$ em vez de $\mathrm{card}(x)$:

$$\begin{aligned} \overline{\overline{x}} = {} & \alpha \text{ onde } \alpha \in \mathrm{On} \text{ é mínimo tal que existe uma bem-ordem de } x \text{ bijetivo com } \alpha, \\ & \hspace{18em} \text{se existe tais } \alpha\text{s, e} \\ \overline{\overline{x}} = {} & V_\alpha \cap \{ y \mid y \sim x \} \text{ onde } \alpha \text{ é mínimo tal que existe } y \in V_\alpha \text{ com } y \sim x, \text{ senão.} \end{aligned}$$

Nota. Fazemos este definição caso não tem uma bem-ordem do x porque seria indesejável usar a classe de equivalência do x sob $\sim$, uma classe própria e portanto difícil usar nossas argumentações, em se mesma.

Com o axioma de escolha o princípio (BO) fala que qualquer conjunto pode ser bem-ordenado, então para qualquer conjunto existe um existe um ordinal com qual tem uma bijeção (cf. §2.6). Logo, com o axioma de escolha a cardinalidade de qualquer conjunto é um ordinal.

Exercício. Mostrar que $\overline{\overline{x}} \notin \mathrm{On}$ se não existe uma bem-ordem do x.

Definição. (Para qualquer noção de cardinalidade.) Um conjunto $\mathbf{m}$ é um cardinal se existe $x \in V$ tal que $\mathrm{card}(x) = \mathbf{m}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{m} \leq \mathbf{n} \quad & \text{se existe } x \text{ e } y \text{ tal que } \mathrm{card}(x) = \mathbf{m} \text{ e } \mathrm{card}(y) = \mathbf{n} \text{ e } x \preceq y. \\ \mathbf{m} + \mathbf{n} & = \mathrm{card}(x \times \{0\} \cup y \times \{1\}), \text{ onde } \mathrm{card}(x) = \mathbf{m} \text{ e } \mathrm{card}(y) = \mathbf{n}. \\ \mathbf{m} \,.\, \mathbf{n} & = \mathrm{card}(x \times y), \text{ onde } \mathrm{card}(x) = \mathbf{m} \text{ e } \mathrm{card}(y) = \mathbf{n}. \\ \mathbf{m}^{\mathbf{n}} & = \mathrm{card}({}^{y}x), \text{ onde } \mathrm{card}(x) = \mathbf{m} \text{ e } \mathrm{card}(y) = \mathbf{n}. \end{aligned}$$

Proposição. $+$ é comutativo e associativo; . é comutativo, associativo e distributivo sobre $+$; e $\mathbf{m}^{\mathbf{n}+\mathbf{k}} = \mathbf{m}^{\mathbf{n}} \,.\, \mathbf{m}^{\mathbf{k}}$ e $(\mathbf{m}^{\mathbf{n}})^{\mathbf{k}} = \mathbf{m}^{\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}}$.

Demonstração. Todos são imediatos das definições.

Algumas outras conseqüências são mostrável sem o axioma de escolha, mas tipicamente usam $\preceq$ e/ou $\preceq^*$.

Exemplo. Se $\mathbf{k} + \mathbf{r} = \mathbf{m} \,.\, \mathbf{n}$, então ou $\mathbf{m} \preceq \mathbf{k}$ ou $\mathbf{n} \preceq^* \mathbf{r}$.

4.2. Lema de Hartog.

Como vimos, com o axioma de escolha vamos medir cardinalidade pelos ordinais, então vale a pena establecer algumas relações entre ordinais e cardinais.

Lema de Hartog. Seja x um conjunto. Então $\{\alpha \in \mathrm{On} \mid \alpha \preceq x\}$ é um conjunto, e, logo, pertence a On. ($\{\alpha \in \mathrm{On} \mid \alpha \sim x\}$ é um conjunto também.) Além disso, $\{\alpha \in \mathrm{On} \mid \alpha \preceq x\} \not\preceq x$ e o ordinal mínimo com este propriedade.

Demonstração. Seja $W = \{(y, <) \mid y \subseteq x \;\&\; < \text{ é uma bem-ordem do } y\}$. Então W é um conjunto (porque é um subconjunto do $\mathcal{P}(x) \times \mathcal{P}(x \times x)$). Como vimos na §2.6, pela teorema de recursão forte e o princípio de reposição, existe uma Função, F, levando bem-ordems para os ordinais. Então $F``W = \{\alpha \in \mathrm{On} \mid \alpha \preceq x\}$ é um conjunto pelo princípio de reposição.

É claro que $\{\alpha \in \mathrm{On} \mid \alpha \preceq x\}$ é um segmento inicial do On, porque se $\beta < \alpha \preceq x$ enão a composição do função de identidade com a injeção do α para x é uma injeção do β para x. Logo $\{\alpha \in \mathrm{On} \mid \alpha \preceq x\}$ pertence a On. Seja $\{\alpha \in \mathrm{On} \mid \alpha \preceq x\} = \beta$. Fosse $\beta \preceq x$ teríamos que $\beta \in \beta$, uma contradição! E é claro que se $\gamma < \beta$ temos $\gamma \preceq x$.

De agora vamos sempre usar nossa noção, $\overline{\overline{x}}$, de cardinalidade.

Proposição. (i) Seja $\kappa \in \mathrm{On}$ um cardinal. $\overline{\overline{\kappa}} = \kappa$. (ii) Seja $\kappa \in \mathrm{On}$ um cardinal. $\forall \alpha < \kappa\; \kappa \not\preceq \alpha$. (iii) Sejam $\alpha, \beta \in \mathrm{On}$. Então $\overline{\overline{\alpha}} \leq \beta \leq \alpha$ implica que $\overline{\overline{\beta}} = \overline{\overline{\alpha}}$.

Demonstração. (i) Lembrar que falar que κ é um cardinal quer dizer que existe alguma x com uma bem-ordem e κ é mínimo tal que $x \sim \kappa$. Escolha um tal x. $\kappa \sim \kappa$ e se $\alpha < \kappa$ e $\alpha \sim \kappa$ então $\alpha \sim x$, uma contradição para a minimalidade do κ, do dois porque $\sim$ é uma relação de equivalência. Logo porque κ se mesmo é bem-ordenado (pelo $\in$) temos $\overline{\overline{\kappa}} = \kappa$.
(ii) Se $\alpha < \kappa$ e $i : \kappa \longrightarrow \alpha$ uma injeção, então $\mathrm{im}(i) \subseteq \alpha$ é isormorfico pelo um isomorfismo que preserva ordem para um ordinal único, vamos falar β, $\leq \alpha$. Então $\beta < \kappa$ e $\beta \sim \kappa$.
(iii) $\beta \leq \alpha$ implica $\beta \subseteq \alpha$, logo $\beta \preceq \alpha$. Mas $\alpha \sim \overline{\overline{\alpha}} \preceq \beta$, então $\alpha \sim \beta$ pela teorema de Schröder-Bernstein.

Nota. Se $\kappa \in \omega \cup \{\omega\}$ temos que $\forall \alpha < \kappa\; \kappa \not\sim \alpha$, e logo κ é um cardinal.

Definição. Seja $\kappa \in \mathrm{On}$ um cardinal. Defina $\kappa^+ = \{\alpha \in \mathrm{On} \mid \alpha \preceq \kappa\}$.

Corolário do Lema de Hartog. Então $\kappa^+ \in \mathrm{On}$, κ^+ é um cardinal, $\kappa < \kappa^+$, e $\kappa^+ \not\preceq \kappa$. É não existe $\beta \in \mathrm{On}$ tal que $\beta < \kappa^+$ e β tem estes propriedades.

Demonstração. É claro que $\kappa \in \kappa^+$. Aplice o lema de Hartog para $x = \kappa$ para ver que κ^+ é um ordinal e $\kappa^+ \not\preceq \kappa$. Se $\beta < \kappa^+$ temos que $\beta \preceq \kappa$, e logo $\kappa^+ \not\sim \beta$. Então $\overline{\overline{\beta}} \leq \kappa$ e κ^+ é um cardinal. Conseqüentemente, não existe um ordinal com cardinalidade máximo porque $\overline{\overline{\alpha}} \leq \alpha < \overline{\overline{\alpha}}^+$ para qualquer $\alpha \in \mathrm{On}$.

Definição. Seja $\kappa \in \mathrm{On}$ um cardinal. Então κ^+ é o sucessor cardinal do κ. Falamos que κ é um cardinal do *tipo sucessor* se existe um cardinal μ tal que $\kappa = \mu^+$, e que κ é do *tipo limite* senão.

Agora vamos enumerar os ordinais que são cardinais. Os primeiros ω são 0, 1, 2, ..., os números naturais. Depois usamos os ordinais em se mesmo para enumerar os ordinais infinitos que são cardinais.

Definição. Pela recursão definamos $\aleph : \mathrm{On} \longrightarrow V$ (On) pelo $\aleph_\alpha = \omega \cup \{\gamma \in \mathrm{On} \mid \exists \beta < \alpha \gamma \preceq \aleph_\beta\}$. Também escrevemos ω_α em vez do $\aleph_\alpha$ para qualquer $\alpha \in \mathrm{On}$. ($\aleph$ é "alef," a primeira letra do alfabeto hebraico.)

Proposição. (i) $\aleph_0 = \omega$. (ii) $\aleph_\alpha \in \mathrm{On}$ é um cardinal para cada $\alpha \in \mathrm{On}$ (iii) Se $\kappa \in \mathrm{On}$ é um cardinal infinito então existe cada $\alpha \in \mathrm{On}$ tal que $\kappa = \aleph_\alpha$. (iv) $\forall \alpha, \beta \in \mathrm{On}$, $\alpha < \beta$ implica $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$. (v) $\aleph_\alpha$ é um cardinal do tipo sucessor se α é um ordinal do tipo sucessor, e é um cardinal do tipo limite se α é um ordinal do tipo limite.

Demonstração. (i), (ii) quando α é um ordinal do tipo sucessor, (iv), e (v) são imediatos das definições, usando o lema de Hartog.

(ii) Se λ é um ordinal do tipo limite temos que $\aleph_\lambda = \bigcup\{\aleph_\alpha^+ \mid \alpha < \lambda\}$ é um conjunto pelos axiomas de reposição e uniões, e enão e um ordinal. E é um cardinal porque se $\gamma < \aleph_\lambda$ então existe $\alpha < \lambda$ tal que $\gamma \in \aleph_\alpha^+ = \aleph_{s(\alpha)}$, e então $\overline{\overline{\gamma}} < \aleph_\alpha^+ < \aleph_\lambda$, e logo $\gamma \not\sim \aleph_\lambda$.

(iii) Seja $\kappa \in \mathrm{On}$ um cardinal infinito. Então $\kappa = \{\gamma \in \mathrm{On} \mid \gamma < \kappa\} = \{\gamma \in \mathrm{On} \mid \gamma \preceq \kappa \;\&\; \kappa \not\preceq \gamma\} = \omega \cup \{\gamma \in \mathrm{On} \mid \exists \mu < \kappa\, \mu \text{ é um cardinal } \;\&\; \gamma \sim \mu\}$. Logo, se temos que para todos cardinais $\mu < \kappa$ são alefs, então κ é um alef. Então qualquer cardinal $\kappa \in \mathrm{On}$ é um alef pelo princípio de indução sobre os ordinais.

Nota. Sem o axioma de escolha pode ser que, por exemplo, $2^{\aleph_0}$ não é um ordinal.

4.3. Cardinais com o axioma de escolha.

Agora vamos assumir o axioma de escolha. Então cada conjunto pode ser bem-ordenado. Logo todos os cardinais são ordinais e a classe dos cardinais é bem-ordenado (como uma subclasse de On).

Proposição. Para todos conjuntos x, y, $x \preceq y$ se e só se $\overline{\overline{x}} \leq \overline{\overline{y}}$.

Demonstração. $x \preceq y$ se e só se $\overline{\overline{x}} \preceq \overline{\overline{y}}$. Fosse $\overline{\overline{y}} < \overline{\overline{x}}$ teríamos que $\overline{\overline{x}} \not\preceq \overline{\overline{y}}$. Então $\overline{\overline{x}} \leq \overline{\overline{y}}$ pela tricotomia.

Corolário. (AE) implica que para quaisquer x, y ou existe uma injeção $i : x \longrightarrow y$, ou existe uma injeção $j : y \longrightarrow x$.

Demonstração. Comparar $\overline{\overline{x}}$ e $\overline{\overline{y}}$ no On.

Teorema de produtos. (AC) Seja κ um cardinal. (Equivalentemente, seja κ um alef.) Então $\kappa.\kappa = \kappa$.

Demonstração. Primeiro nota que a teorema é verdadeira para ω: definando $(k, l) \prec (m, n)$ se ou $k+l < m+n$ ou $k+l < m+n$ e $k < m$, ou $(k,l) \prec' (m,n)$ se ou $\max\{k,l\} < \max\{m,n\}$, ou $\max\{k,l\} = \max\{m,n\}$ e $l < n$, ou $\max\{k,l\} = \max\{m,n\}$, $l = n$ e $k < m$ é claro que $\prec$ e $\prec'$ são bem-ordems de $\omega \times \omega$ e exitems bijeções entre elas e $(\omega, \in)$.

Agora usamos indução. Suponhamos que a teorema é verdadeira para todos cardinais infinito menos que κ. Defina uma ordem do $\kappa \times \kappa$ pelo $(\alpha,\beta) \prec (\gamma,\delta)$ se $\alpha \cup \beta < \gamma \cup \delta$, ou $\alpha \cup \beta = \gamma \cup \delta$ e $\beta < \delta$, ou $\alpha \cup \beta = \gamma \cup \delta$, $\beta = \delta$ e $\alpha < \gamma$. Nota que $\{(\alpha,\beta) \mid (\alpha,\beta) \preceq (\gamma,\gamma)\} = (\gamma+1) \times (\gamma+1)$ para qualquer $\gamma < \kappa$

Eu afirmo que esta ordem é uma bem-ordenando. É claro que $\prec$ é uma ordem parcial. E se $(\alpha,\beta) \not\prec (\gamma,\delta)$ e $(\gamma,\delta) \not\prec (\alpha,\beta)$ então $\alpha \cup \beta = \gamma \cup \delta$, $\beta = \delta$ e $\alpha = \gamma$, logo $(\alpha,\beta) = (\gamma,\delta)$, e temos que $\prec$ é uma ordem total. Para ver que $\prec$ é bem-fundada, seja $Z \subseteq \kappa \times \kappa$ com $\emptyset \neq \emptyset$. Seja ρ mínimo tal que existe $(\alpha,\beta) \in Z$ tal que $\alpha \cup \beta = \rho$. Primeiro seja $Z_1 = \{(\alpha,\beta) \in Z \mid \alpha \cup \beta = \rho\}$. Seja β_0 mínimo tal que existe α com $(\alpha,\beta_0) \in Z_1$. Agora seja $Z_2 = \{(\alpha,\beta \in Z_1 \mid \beta = \beta_0\}$. Seja α_0 mínimo tal que $(\alpha_0,\beta_0) \in Z_2$. Logo (α_0,β_0) é $\prec$-mínimo no Z.

Então existe um único $\rho \in \mathrm{On}$ tal que $(\kappa \times \kappa, \prec)$ é isomorfico para $(\rho, \in)$ pelo uma bijeção que preserva ordem. Seja $f : (\rho, \in) \longrightarrow (\kappa \times \kappa, \prec)$ o isomorfismo. Suponhamos que $\kappa < \rho$ e que $f(\kappa) = (\alpha,\beta)$. Seja $\gamma = \alpha \cup \beta$. Então $(\alpha,\beta) \preceq (\gamma,\gamma)$ e temos uma injeção $f|\kappa : \kappa \longrightarrow (\gamma+1) \times (\gamma+1)$. Porque κ é infinito temos que $\gamma \times \gamma$ é infinito, logo γ é infinito. Mas $\gamma < \kappa$, então $\gamma + 1 < \kappa$ e $\overline{\overline{\gamma+1}} < \kappa$. Então, pela hipótese da indução, $\overline{\overline{s(\gamma)}}.\overline{\overline{s(\gamma)}} = \overline{\overline{s(\gamma)}}$. Então $\kappa \prec s(\gamma) \times s(\gamma) \sim s(\gamma) \prec \kappa$. Uma contradição. Logo $\rho = \kappa$.

Então, pelo indução nos ordinais temos mostrado que $\kappa.\kappa = \kappa$ para todos cardinais κ.

Corolário. Seja κ um cardinal infinito e sejam x_α conjuntos tal que $\overline{\overline{x_\alpha}} \leq \kappa$ para todos $\alpha < \kappa$. Então $\overline{\overline{\bigcup\{x_\alpha \mid \alpha < \kappa\}}} \leq \kappa$.

Demonstração. Vamos aplicar o axioma de escolha para $Y = \{y_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$, onde para cada $\alpha < \kappa$ pegamos $y_\alpha = \{f \mid f : x_\alpha \longrightarrow \kappa \text{ é uma injeção}\}$. Logo existe uma função $g : Y \longrightarrow \bigcup Y$ tal que $g_\alpha : x_\alpha \longrightarrow \kappa$ é uma injeção para todos $\alpha < \kappa$. Defina $h : \bigcup\{x_\alpha \mid \alpha < \kappa\} \longrightarrow \kappa \times \kappa$ pelo $h(z) = (\alpha, g_\alpha(z))$ onde α é mínimo tal que $z \in x_\alpha$. Logo $\overline{\overline{\bigcup\{x_\alpha \mid \alpha < \kappa\}}} \leq \kappa$ pelo teorema.

Corolário. (i) Sejam κ, μ cardinais e ao menos um infinito. Então $\kappa + \mu = \max\{\kappa, \mu\}$.
(ii) Sejam κ, μ cardinais e ao menos um infinito (*i.e.*, um aleph) e nenhum dos dois 0. Então $\kappa.\mu = \max\{\kappa, \mu\}$.
(iii) Sejam κ, μ cardinais $2 \leq \kappa \leq 2^\mu$ e μ um aleph. Então $\kappa^\mu = 2^\mu$.

Demonstração. (i) Se $\kappa \leq \mu$, então $\mu \leq \kappa + \mu \leq \mu + \mu = 2.\mu \leq \mu.\mu = \mu$.
(ii) Se $0 < \kappa < \mu$, então $\mu \leq \kappa.\mu \leq \mu.\mu = \mu$.
(iii) $2^\mu \leq \kappa^\mu \leq (2^\mu)^\mu = 2^{\mu.\mu} = 2^\mu$.

Corolário. $\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_{\alpha \cup \beta} = \aleph_\alpha.\aleph_\beta$

Demonstração. $\aleph_{\alpha \cup \beta} = \aleph_{\max(\{\alpha \cup \beta\})} = \max(\{\aleph_\alpha, \aleph_\beta\})$.

Então temos fixado + e . nos cardinais. Mas exponciação fica um mistério, e na verdade é aqui onde o assunto começe viver. Cantor soube, como nós, que $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$ e, mais geralmente que $\aleph_{\alpha+1} \leq 2^{\aleph_\alpha}$ para cada $\alpha \in$ On, mas não pode mostrar qualquer cardinal entre eles (pares). Então ele conjeturou que o *hipótese do continuo (HC)*, que $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ foi verdadeiro, e mesmo que o *hipótese do continuo geral (HCG)* , que $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$ foi verdadeiro. Isso é talvez a regra o mais simples posível. Mas como veremos na §6 *não tem razão supor que é verdadeiro*, porque não é possível mostrar HC dos axiomas do ZF + AE (Cohen, 1963), nem mostrar que é falso (Gödel, 1938).

4.4. Cofinalidade.

Agora vamos ver um sentido em qual o HCG é muito simples: ele determina todos os outras regras da exponenciação. Para fazer isso precisamos de um conceito que é muito útil apesar disso também

Definição. Sejam α, $\beta \in$ On e $f : \alpha \longrightarrow \beta$ uma função. f é *cofinal* (ou *leva* α *cofinalmente para/no* β) se $\forall \gamma < \beta\ \exists \delta < \alpha\ (\gamma \leq f(\delta))$.

Definição. Seja $\beta \in$ On. A *cofinalidade* de β, $\mathrm{cf}(\beta)$, (é o mínimo α tal que do qual existe uma função cofinal para β.

Logo, $\mathrm{cf}(\beta) \leq \beta$ e é um cardinal para qualquer β. E se β é um ordinal do tipo sucessor, então $\mathrm{cf}(\beta) = 1$ (usando a fun=ção $f(0) = \bigcup \beta$).

Proposição. Existe uma função cofinal $f : \mathrm{cf}(\beta) \longrightarrow \beta$ que é cresente estritamente ($\sigma < \tau < \mathrm{cf}(\beta) \longrightarrow f(\sigma) < f(\tau)$), para qualquer $\beta \in$ On.

Demonstração. Seja $g : \mathrm{cf}(\beta) \longrightarrow \beta$ qualquer função cofinal, e defina f pelo recursão pelo $f(\tau) = \max(\{ g(\tau), \sup\{ f(\sigma) \mid \sigma < \tau \} \})$ para $\tau < \mathrm{cf}(\beta)$.

Proposição. Se $\alpha \in$ On é do tipo limite e $f : \alpha \longrightarrow \beta$ é cofinal e cresente estritamente, então $\mathrm{cf}(\alpha) = \mathrm{cf}(\beta)$.

Demonstração. Seja $g : \mathrm{cf}(\alpha) \longrightarrow \alpha$ qualquer função cofinal. Então $f \cdot g : \mathrm{cf}(\alpha) \longrightarrow \beta$ é cofinal. Logo $\mathrm{cf}(\beta) \leq \mathrm{cf}(\alpha)$. E se $h : \mathrm{cf}(\beta) \longrightarrow \beta$ é cofinal, então $k : \mathrm{cf}(\beta) \longrightarrow \alpha$ é cofinal, onde $k(\tau) =$ o mínimo σ tal que $h(\tau) < f(\sigma)$.

Corolário. $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\beta)) = \mathrm{cf}(\beta)$ para qualquer $\beta \in$ On.

Demonstração. Imediato pelas duas proposições prévias.

Corolário. Seja α um ordinal do tipo limite. Logo $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) = \mathrm{cf}(\alpha)$.

Demonstração. Imediato pela última proposição usando a função $\aleph$.

Definição. Seja $\beta \in$ On é um cardinal infinito. Se $\mathrm{cf}(\beta) = \beta$ falamos que β é *regular*. Se $\mathrm{cf}(\beta) < \beta$ falamos que β é *singular*.

Exemplos. ω é regular. $\aleph_\omega$ é singular (veja o corolário segundo para ver que $\mathrm{cf}(\aleph_\omega) = \omega$).

Até agora não tivemos usado o axioma de escolha nesta seção.

Proposição. (AE) implica κ^+ é regular para qualquer cardinal κ.

Demonstração. Fosse $f : \alpha \longrightarrow \kappa^+$ cofinal onde $\alpha < \kappa^+$, então $\kappa^+ = \bigcup\{ f(\gamma) \mid \gamma < \alpha\}$. Mas $f(\gamma)$, $\alpha < \kappa$, então $\overline{\overline{f(\gamma)}}$, $\overline{\overline{\alpha}} < \kappa^+$ e teríamos que κ^+ seria a união de κ conjuntos cada um com cardinalidade $\leq \kappa$. Uma contradição pelo primeiro Corolário do teorema dos productos na §4.3.

(**Nota.** Sem (AE) é possível que $\mathrm{cf}(\omega_1) = \omega$.)

Um pergunta natural agora é se existem cardinais do tipos limites e regulares também. Se $\aleph_\alpha$ é um tal cardinal, então $\aleph_\alpha = \alpha$. Mas isso não é bastante. Por exemplo, se $\alpha = \bigcup\{ \aleph_0, \aleph_\omega, \aleph_{\omega_\omega}, \ldots\}$ temos que $\aleph_\alpha = \alpha$ mas $\mathrm{cf}(\alpha) = \omega$. Então o primeiro cardinal do tipo limite que é regular é mais grande.

Definição. κ é *inacessível fracamente* se é do tipo limite e regular.

Definição. (AC) κ é *inacessível fortemente* se é regular $\forall \mu < \kappa\, 2^\mu < \kappa$.

Proposição. Se κ é inacessível fortemente, é inacessível fracamente. E (HCG) implica que se κ é inacessível fracamente, é inacessível fortemente.

Agora vamos usar a noção de cofinalidade ajudar mostrar como (HCG) simplifica a exponenciação dos cardinais.

Propsição. Seja κ um cardinal infinito e $\mathrm{cf}(\kappa) \leq \mu$. Então $\kappa^\mu \not\preceq^* \kappa$.

Demonstração. A demonstração é uma variante do demonstração do Cantor que $\mathcal{P}(x) \not\preceq^x$ que vimos na §1.1. Seja $f : \mu \longrightarrow \kappa$ qualquer função cofinal e $g : \kappa \longrightarrow {}^\mu\kappa$ qualquer função. Vamos mostrar que g não pode ser uma sobrejeção. Defina $h : \mu \longrightarrow \kappa$ pelo $h(\alpha) =$ o membro mínimio de $\kappa \setminus \{ (g(\beta))(\alpha) \mid \beta < f(\alpha)\}$. Se $\gamma < kappa$ pode escolhar $\alpha < \mu$ tal que $\gamma < f(\alpha)$ porque f é cofinal. Assim tem $h(\alpha) \neq g(\gamma)(\alpha)$. Então $h \notin \mathrm{im}(g)$.

Corolário. (AE) Seja κ um cardinal infinito e $\mathrm{cf}(\kappa) \leq \mu$. Então $\kappa < \kappa^\mu$.

Demonstrção. É claro que $\kappa \preceq \kappa^\mu$, então pelo proposição e tricotomia $\kappa < \kappa^\mu$.

Corolário. (AE) Seja κ um cardinal infinito, então $\kappa < \mathrm{cf}(2^\kappa)$.

Demonstrção. Se $\mathrm{cf}(2^\kappa) \leq \kappa$ temos que $2^\kappa < (2^\kappa)^\kappa = 2^{\kappa\cdot\kappa} = 2^\kappa$, uma contradição.

Proposição. (AE + HCG) Sejam κ, μ cardinais, $2 \leq \kappa$, μ é ao menos um do κ, μ infinito. Então, (i) $\kappa \leq \mu \longrightarrow \kappa^\mu = \mu^+$, (ii) $\mathrm{cf}(\kappa) \leq \mu < \kappa \longrightarrow \kappa^\mu = \kappa^+$, e (iii) $\mu < \mathrm{cf}(\kappa) \longrightarrow \kappa^\mu = \kappa$,

Demonstrção. (i) Já vimos (sem (HCG)) que $\kappa^\mu = 2^\mu$. (HCG) fala que $2^\mu = \mu^+$.
(ii) O primeiro corolário em cima fala que $\kappa < \kappa^\mu$. Mas $\kappa^\mu \leq \kappa^\kappa = 2^\kappa, = \kappa^+$ pelo (HCG).
(iii) $\mu < \mathrm{cf}(\kappa)$ fala que qualquer função $f : \mu \longrightarrow \kappa$ não é cofinal, então ${}^\mu\kappa = \bigcup\{ {}^\mu\alpha \mid \alpha < \kappa\}$, e $\overline{\overline{{}^\mu\alpha}} \leq \max(\{\overline{\overline{\alpha}}, \mu\})^+ \leq \kappa$.

Sem o (HCG) exponenciação pode ser muito mais complicada. Tem muitos coisas que são independente do ZF + AE – não podem ser mostrados nem podem ser mostrados os contrários. (Veja §6 para ganhar um pouco mais explicação disso.) Embora existe algumas resultados que podem ser mostrados do ZF + AE, e várias perguntas abertas importantes. Por exemplo temos os seguintes.

Teorema. (Silver, 1975) Se $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ para todos $\alpha < \omega_1$, então $2^{\aleph_{\omega_1}} = \aleph_{\omega_1+1}$

E tem o mesmo resultado para outros cardinais κ com $\omega < \mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$. No contraste, a situação é muito diferente para cardinais κ singular com $\omega = \mathrm{cf}(\kappa)$.

Teorema. (Gitik-Magidor, 1989) Para qualquer $\delta < \omega_1$ e possível que $2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$ para todos $n < \omega$, mas $2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\delta+1}$.

Ainda tem algumas limitações quando $\mathrm{cf}(\kappa) = \omega$.

Teorema. (Shelah, 1989) Se $2^{\alpha_n} < \aleph_\omega$ para cada $n < \omega$, então $2^{\aleph_\omega} < \min(\{\aleph_{\omega_4}, \aleph_{(2^\omega)^+}\})$.

Uma das perguntas mais destacadas neste parte do teoria dos conjuntos é se o "4" na teorema de Shelah em cima pode ser melhorizado, (Talvez para "1," mas em qualquer modo seria muito importante.)