Teoria dos conjuntos

Charles Morgan*

Capítulo 3. O axioma de escolha.

Agora vamos tratar do ultimo axioma do nosso sistema de teoria dos conjuntos, o axioma de escolha. Vamos mostrar a equivalência entre o axioma de escolha e dois outros princípios muitos úteis.

Axioma de Escolha. (AE) Se x é um conjunto de conjuntos não vazios, então existe uma função que escolha um membro de cada dos conjuntos quem pertencem a x: $f : x \longrightarrow \bigcup x \; \forall y \in x \; f(x) \in x$.

Princípio de Bem-Ordenando. (BO) Seja x um conjunto. Então existe uma bem-ordem do x.

Lema de Zorn. (LZ) Seja $(X, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado tal que qualquer subconjunto C que é totalmente ordenado pelo $\leq$ (*i.e.* qualquer cadeia no $(X, \leq)$) tem um limite superior. Então X tem um membro máximo.

Teorema. (AE) $\Longleftrightarrow$ (BO) $\Longleftrightarrow$ (LZ).

Demonstração. (LZ) $\Longrightarrow$ (BO). Seja X um conjunto e considerar o conjunto dos bem-ordenandos dos subconjuntos de X. É um conjunto parcialmente ordenado sob a relação de sendo um segmento inicial: $(Y, \leq) \prec (Y', \leq')$ se e só se $(Y, \leq)$ é um segmento inicial de $(Y', \leq')$. É claro que qualquer a união de qualquer cadeia é um supremo para a cadeia. Então o lema de Zorn fala que existe um elemento máximo, seja $(Z, \leq)$. Se $Z \neq X$ podemos escolhar $x \in X \setminus Z$ e ter uma bem-ordem do $Z \cup \{x\}$ pelo botando $z < x$ para todos $z \in Z$. Então $Z = X$ e $\leq$ é um bem-ordem do X.

(BO) $\Longrightarrow$ (AE). Seja x um conjunto de conjuntos não vazios. Seja $<$ uma bem-ordem do x. Podemos tomar $f(y) =$ o membro $<$-mínimo de y para cada $y \in x$.

(AE) $\longrightarrow$ (LZ). Seja $(X, \preceq)$ um conjunto parcialmente ordenado tal que qualquer cadeia tem um limite superior. Pelo axioma de escolha podemos achar uma função $f : \mathcal{P}_{\neq \emptyset}(X) \longrightarrow X$ tal que $\forall A \subseteq X \; (A \neq \emptyset \longrightarrow f(A) \in A)$. Vamos usar f para ajudar nós escolhar pela recuraão uma cadeia no $(X, \prec)$ do qual um limite superior será máximo no x.

Para qualquer $B \subseteq X$ defina $\uparrow(B) = \{x \in X \mid \forall b \in B \; b \prec x\}$. Seja $\star$ um conjunto que não pertence a x. Pela teorema de recursão (forte) defina uma Função $F : \mathrm{On} \longrightarrow X \cup \{\star\}$ tal que $F(\alpha) = f(\uparrow(\{F(\beta) \mid \beta < \alpha\}))$ se $\uparrow(\{F(\beta) \mid \beta < \alpha\}) \neq \emptyset$, and $F(\alpha) = \star$ senão.

Se $\beta < \alpha$ e $F(\alpha) \neq \star$, então $F(\beta) \prec F(\alpha)$. Logo, fosse $\star \notin \mathrm{rge}(F)$ teríamos que F seria uma injeção, e então $F^{-1} : \mathrm{im}(F) \longrightarrow \mathrm{On}$ seria uma sobrejeção. Mas $\mathrm{im}(F) \subseteq X(\cup\{\star\})$ é em qualquer caso um conjunto. Então pelo princípio de reposição teríamos que On seria um conjunto também. Uma contradição! Logo $\star \in \mathrm{im}(F)$.

* versão 1.0, 3/12/00

Então seja α_0 mínimo tal que $F(\alpha_0) = \star$. Temos que $\{\,F(\beta) \mid \beta < \alpha_0\,\}$ é um cadeia no $(X, \prec)$ e $\uparrow(\{\,F(\beta) \mid \beta < \alpha_0\,\}) = \emptyset$. Se x_0 é um limite superior de $\{\,F(\beta) \mid \beta < \alpha_0\,\}$ então x_0 é máximo no X. (x_0 é, então, também o elemento máximo do $\{\,F(\beta) \mid \beta < \alpha_0\,\}$ e α_0 é um ordinal do tipo sucessor.)

Nota. Nos exercísios deixei varias conseqüências do axioma para vocês mostrar. Entre elas é um outro equivalente do axioma de escolha: que qualquer produto cartesiano geral é não vazio.

Nota. Taís me perguntou no fim de uma aula se existe alguma coisa para a teoria dos conjuntos parecida à dicotomia entre geometria euclidiana e não-euclidiana. Para dar uma resposta razoável para esta pergunta vale a pena parar um momento para pensar sobre axiomatisação e abstração na matemática mas geralmente. Fazemos abstrações (do qual axiomatisações são um tipo) muito na matemática. Tem ao menos três razões para fazer isso. Ajuda nós entender melhor que estamos fazendo nas situações mais concretos. Este parece ser uma coisa que muitos vezes sentimos ou acreditamos é um bom para nós em se mesmo, e talvez as vezes faz sentir mais seguro. Abstrações muitos vezes esclarecem como tratar outras problemas numa área. E abstrações muitos vezes ajudam nós abrir novos áreas da matemática, criando materias interesantes novos com teoria nova e problemas novos. Quando fazemos essas abstrações nunca temos garantias que qualquer dos razão vai dar certo para nós. Porém nossa experiência é que muitos vezes vale a pena. Simultâneo para abratração temos um processo continuo das coisas abstraitos virando mais concreto com uso. Por exemplo $2^{1/2}$, os reis $\mathbf{R}$ e mesmo o cardinal ω_1 que vamos encontrar no cápitulo proximo se tornam mais concreto quando viramos acostumados para eles.

O descobrimento do geometrias não-euclidianas não foi só um resposta para uma pergunta formal sobre os axiomas de Euclid, mas foi importante porque dou muito introspecção na geometria em se mesmo, do dois na área "velha" e não sentido mais amplo que ajudou criar. Até agora parece que precisamos dos axiomas do ZF para explicar nossas idéias sobre conjuntos. Isso é que ninguem tenha tido sucesso iluminando a teoria dos conjuntos ou criando uma vista nova sobre o assunto pelo mudando ou trocando os axiomas do ZF. Não falo que não é possível, mas talvez tem menos probabilidade agora de uma revelações desta natureza depois de um século da pesquisa no assunto (muito intensificada nas ultimas 40 anos) que na epoca do descobrimento do geometrias não-euclidianas – talvez porque agora estamos mais sensível para este perguntas de axiomatizações e modelos (cf. Cápitulo 6).

Embora, talvez um analogia da dicotomia seria ZF com AE e ZF sem AE. ZF com AE é o sistema o mais importante para nós, dando para nós coisas que esperemos dos conjunto, como que produtos cartesianos não são vazio e que cada espaço vectorial tem uma base. Mas estudiando ZF sem AE com alguma outro axioma (como por exemplo o axioma de determinacidade†) pode também dá para nós introspecções úteis sobre a natureza da coleção dos conjuntos, e sobre a teoria ZF com AE. Mas falarei mais sobre este pergunta na §6.

† Veja, por exemplo, Alexander Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Springer, 1995, ou Yiannis Moschovakis, *Descriptive Set Theory*, North Holland, 1980.