Teoria dos conjuntos

Charles Morgan*

Capítulo 2. Ordinais, relações bem-fundadas.

2.1. Relações bem-fundadas.

Vamos começar com algumas definições e rápidamente chegaremos na noção de um conjunto bem-ordenado.

Definição. Por qualquer X e qualquer relação binária $<$ sobre X, $(X,<)$ é um *conjunto parcialmente ordenado* (*conjunto p.o.*) se $<$ é uma relação anti-simétrica e transitiva no X: $\forall x \in X x \not< x$ and $\forall x \in X \, \forall y \in X \, \forall z \in X \, (x < y \,\&\, y < z \longrightarrow x < z)$. Falamos que $<$ *ordena parcialmente* X ou $<$ é um *ordenando parcial* ou *ordem parcial* de X.

$(X,<)$ é um *conjunto linearmente ordenado* (*conjunto l.o.*) ou um *conjunto totalmente ordenado* (*conjunto t.o.*) se $(X,<)$ é um conjunto parcialmente ordenado e $\forall x \in X \, \forall y \in X$ ($x < y$ ou $x = y$ ou $y < x$) também.

Definição. Agora seja $<$ qualquer relação binária sobre X. Se $Y \subseteq X$, então $(Y,<)$ é um *segmento inicial* de $(X,<)$ se $\forall x \in X \, \forall y \in X \, (x < y \,\&\, y \in Y \longrightarrow x \in Y)$. Muitas vezes falaremos apenas que Y é um segmento inicial de X quando é claro de qual relação $<$ estamos falando. $(Y,<)$ é um segmento inicial próprio de $(X,<)$ se $Y \neq X$ também. Para todos $s \in X$ e $Y \subseteq X$, falaremos que s é *um sucessor* de Y se $s \notin Y$ e $\{ y \in X \mid y < s \} \subseteq Y$. E se $Y \subseteq X$ e $y \in X$ falaremos que y é *$<$-mínimo no* Y se $y \in Y$ é $\forall x \in X \, (x < y \longrightarrow x \notin Y)$.

Teorema. As seguintes condições são equivalentes para qualquer X e qualquer relação binária sobre X.

(1) Cada segmento inicial próprio de X tem um sucessor.
(2) Cada subconjunto não-vazio de X tem um elemento $<$-mínimo.
(3) O princípo de indução sobre $<$ é verdadeira:
$$\forall x \in X \left((\forall y \in X \, (y < x \longrightarrow \phi(y))) \longrightarrow \phi(x) \right) \longrightarrow \forall x \in X \, \phi(x).$$

Demonstração. (2) $\Longrightarrow$ (3). Suponhamos que $\forall x \in X \left((\forall y \in X \, (y < x \longrightarrow \phi(y))) \longrightarrow \phi(x) \right)$ mas $\neg \forall x \in X \, \phi(x))$. Então $\{ x \in X \mid \neg\phi(x) \}$ não é vazio e, para (2), tem um membro, vamos falar x_0, que é $<$-mínimo. Mas logo temos que $\forall y < x_0 \, \phi(y)$ e então $\phi(x)$, uma contradição.

(3) $\Longrightarrow$ (2). Se $Y \subseteq X$ e Y não tem um membro $<$-mínimo, então temos que $\forall x \in X$ ($\forall y \in X(y < x \,\&\, y \notin Y)) \longrightarrow x \notin Y$. Aplicando (3), temos que $\forall x \in X \, x \notin Y$. Então Y é vazio.

(2) $\Longrightarrow$ (1). Se Y é um segmento inicial próprio de X, então $X \setminus Y$ $(= \{ x \in X \mid x \notin Y \})$ não é vazio, e (2) fala que tem um membro, s vamos falar, que é $<$-mínimo. Logo s é um sucessor de Y.

* versão 1.2, 1/12/00

(1) $\Longrightarrow$ (2). Para todos x, $y \in X$ seja $x <^* y$ se tem $x_0, \ldots, x_{n-1} \in X$ e $x < x_0 < \ldots < x_{n-1} < y$. $<^*$ é o fechamento transitivo de $<$: é transitivo, $< \subseteq <^*$ e se R é uma relação binária transitiva com $< \subseteq R$, então $<^* \subseteq R$.

(Para ver que $<^*$ é transitivo tome $x <^* y$ e $y <^* z$ e suponhamos que temos isso porque $x < x_0 < \ldots < x_{n-1} < y$ e $y < y_0 < \ldots < y_{m-1} < z$ para algumas $x_0, \ldots, x_{n-1}, y_0, \ldots, y_{m-1} \in X$. Logo, $x < x_0 < \ldots < x_{n-1} < y < y_0 < \ldots < y_{m-1} < z$, e então $x < z$. É claro que $x < y \Longrightarrow x <^* y$: tome $n = 0$ na definição de $<^*$. E se $x <^* y$ existem $x_0 < \ldots < x_{n-1}$ com $x < x_0 < \ldots < x_{n-1} < y$, então se $< \subseteq R$ temos $x \, R \, x_0 \, R \, \ldots \, R x_{n-1} \, R y$, e logo, se R é transitivo, temos $x \, R \, y$.)

Agora suponhamos que $Y \subseteq X$ e Y não é vazio. $\{ x \in X \mid x \notin Y \,\&\, \forall y \in X \, (y <^* x \longrightarrow y \notin Y) \}$, $= Z$, vamos falar, é um segmento inicial e não é próprio. Se s é um sucessor de Z temos que $s \in Y$ e s é $<$-mínimo no Y.

Definição. Uma relação binária $<$ sobre um conjunto X é *bem-fundada* se satisfaz as condições (1)-(3) do teorema em cima. Um ordenando total bem-fundado é chamado um *bem-ordenando* ou uma *bem-ordem.* $(X, <)$ é então um *conjunto bem-ordenado* (um *conjunto b.o.*).

2.2 Ordinais.

Então, um conjunto bem-ordenado é um conjunto que sobre qual podemos "contar," um passo de cada vez. Os ordinais são conjuntos bem-ordenados que serão cruciais para nós. Em fato, veremos mas tarde que qualquer conjunto bem-ordenado é isomorfico para um ordinal para um isomorfismo que preservar ordem, então pode falar que se quer "contar" tem que usar os ordinais.

Definição. Um *(número) ordinal* é um conjunto que é bem-ordenado por $\in$. (Frequentemente escrevemos $<$ em vez de $\in$ quando estamos tratando dos ordinais.)

Exemplos. 0, 1, 2, 3, ..., ω, ... são (os primeiros) ordinais. Exercício: se isso não está aparente para você, vai confirmá-lo.

Proposição. Se α é um ordinal e $z \in \alpha$, logo z é um conjunto transitivo e então é um ordinal também.

Demonstração. Suponhamos que $x \in y \in z \in \alpha$. Temos que mostrar que $x \in z$. Mas α é transitivo, então $y \in \alpha$, então $x \in \alpha$. α também é bem-ordenado por $\in$, então $\in$ é uma relação trasitiva sobre α. Porque temos $x \in y$ e $y \in z$, então $x \in z$.

Definição. Se α é um ordinal defina $s(\alpha) = \alpha \cup \{ \alpha \}$.

Proposição. Se α é um ordinal, então $s(\alpha)$ é um ordinal também.

Demonstração. Se $z \in y \in s(\alpha)$, então ou $z \in y \in \alpha$ ou $z \in y \in \{ \alpha \}$. No primeiro caso $z \in \alpha$ porque $\in$ é transitivo sobre α, e no segundo caso $z \in y = \alpha$. Então, em qualquer caso $z \in s(\alpha)$. Logo $s(\alpha)$ é transitivo. E é claro que $s(\alpha)$ é bem-ordenado por $\in$.

Proposição. Se $x \neq \emptyset$ é um conjunto dos ordinais, então $\bigcap x$ é um ordinal também.

Demonstração. É claro que qualquer intersecção dos conjuntos transitivos é transitiva. E se $\alpha \in x$, então $\bigcap x \subseteq \alpha$ e deve ser bem-ordenada por $\in$ porque α é bem-ordenado por $\in$.

Proposição. Se α, β são ordinais e $\alpha \subseteq \beta$, então (a) α é um segmento inicial de β, e (b) $\alpha \neq \beta \Longrightarrow \alpha \in \beta$.

Demonstração. (a) Se $\gamma \in \beta$, $\delta \in \alpha$ e $\gamma \in \delta$ (*i.e.*, γ vem antes do δ no b.o. do β por $\in$), então $\gamma \in \delta \in \alpha$, e então $\gamma \in \alpha$ pela transitividade do $\in$ sobre α.

(b) Se $\alpha \neq \beta$, então, pela equivalente de ser bem-fundado, existe um sucessor, vamos falar s, de α como subconjunto do β. Nota que s é único porque $\in$ é um l.o. do β. Também porque $\in$ é um l.o. do β, $\gamma \in \alpha$ implica que $\gamma \in s$, então $\alpha \subseteq s$. No outro lado, $S = \alpha \cup \{s\}$ é um segmento inicial do β e, então, é transitivo e, logo, para qualquer $\gamma \in s (\in S)$ temos $\gamma \in S$. Porque $s \notin s$ (para o axioma de fundação), $\gamma \in s$ implica $\gamma \in \alpha$ e $s \subseteq \alpha$. Então $\alpha = s, \in \beta$.

2.3. Tricotomia.

Teorema. Se α e β são ordinais um e exatamente um dos seguintes acontece: $\alpha \in \beta$ ou $\alpha = \beta$ ou $\beta < \alpha$.

Demonstração. $\alpha \cap \beta = \alpha$ ou $\alpha \cap \beta \subset \alpha$ e $\alpha \cap \beta \neq \alpha$. Similarmente $\alpha \cap \beta = \beta$ ou $\alpha \cap \beta \subset \beta$ e $\alpha \cap \beta \neq \beta$, dando quatro casos para considerar para nós.

(i) $\alpha \cap \beta = \alpha$ e $\alpha \cap \beta = \beta$. Logo $\alpha = \beta$.

(ii) $\alpha \cap \beta = \alpha$ e $\alpha \cap \beta \subset \beta$ e $\alpha \cap \beta \neq \beta$. Então a última proposição de Seção (2.2) dá imediatemente que $\alpha \in \beta$.

(iii) $\alpha \cap \beta = \beta$ e $\alpha \cap \beta \subset \alpha$ e $\alpha \cap \beta \neq \alpha$. Então a última proposição de Seção (2.2) dá que $\beta \in \alpha$.

(iv) $\alpha \cap \beta \subset \alpha, \beta$, $\alpha \cap \beta \neq \alpha$ e $\alpha \cap \beta \neq \beta$. Nota que já mostramos que $\alpha \cap \beta$ é um ordinal. Então a última proposição de Seção (2.2) dá que $\alpha \cap \beta \in \alpha$ e que $\alpha \cap \beta \in \beta$. Então $\alpha \cap \beta \in \alpha \cap \beta$, uma contradição! (Para o axioma de fundação.)

Corolário. Por todos ordinais α e β, $\alpha \subseteq \beta$ ou $\beta \subseteq \alpha$.

Demonstração. $\alpha \in \beta \Longrightarrow \alpha \subseteq \beta$ porque β é transitivo; $\beta \in \alpha \Longrightarrow \beta \subseteq \alpha$ porque α é transitivo; $\alpha = \beta \Longrightarrow \alpha \subseteq \beta \,\&\, \beta \subseteq \alpha$.

Notação. Escrevemos $\alpha \leq \beta$ se $\alpha \in \beta$ ou $\alpha = \beta$.

Corolário. A coleção de todos os ordinais é uma coleção que é bem-ordenada por $\in$.

Demonstração. É facil ver que a coleção é parcialmente ordenada por $\in$ pela a transitividade dos ordinais. A teorema da tricotomia da que $\in$ ordena a coleção totalmente. Então, vamos ver que $\in$ é bem-fundado na coleção.

Suponhamos que Z é um subconjunto da coleção dos ordinais e $Z \neq \emptyset$. Seja $\alpha \in Z$. Ou α é $\in$-mínimo (quando acabamos), ou $Y = \alpha \cap Z \neq \emptyset$. Y é um subconjunto não-vazio do α, então existe um $\beta \in Y$ que é $\in$-mínimo. Mas β deve ser $\in$-mínimo no Z também, porque se $\gamma \in \beta$ temos que $\beta \in \alpha$ e, pela transitividade do α, $\gamma \in \alpha$. Então $\gamma \in Z$.

Corolário. A coleção de todos ordinais não é um conjunto, é uma classe própria.

Demonstração. Seja a coleção um conjunto, x vamos falar, teríamos que $x \in x$ porque seria um conjunto bem-ordenado por $\in$. Isso seria uma contradição para o axioma de fundação (de novo).

Este corolário é às vezes chamado o *paradoxo de Burali-Forti*. Como você já entende, como o paradoxo de Cantor, não é um paradoxo de verdade. Ainda, como com V é útil ter um nome para a classe própria de todos os ordinais. Vamos escrever *On* por esta classe.

Corolário. Se x é um conjunto dos ordinais, então $\bigcup x$ é também um ordinal.

Demonstração. É claro que $\bigcup x$ é transitivo. E porque $\bigcup x \subseteq \mathrm{On}$, tricotomia dá que $\in$ ordena $\bigcup x$ totalmente. Assim, suponhamos que $\emptyset \neq Z \subseteq \bigcup x$. Tome $\alpha \in Z$. Como no corolário dois atrás, ou α já é $\in$-mínimo, ou $\alpha \cap Z$ tem um membro que é $\in$-mínimo e que é $\in$-mínimo no Z também.

2.4. Sucessors e limites. Seja α um ordinal. Temos duas coisas que podem acontecer.

Ou existe um elemento $\in$-máximo do α, *i.e.*, um $\beta \in \alpha$ tal que $\forall \gamma \in \alpha\, \gamma \leq \beta$. Neste caso $\alpha = \{\beta\} \cup \{\gamma \mid \gamma < \beta\}, = \{\beta\} \cup \beta, = s(\beta)$. Se existe β tal que $\alpha = s(\beta)$ falaremos que α e um *ordinal do tipo sucessor*.

Ou não existe um membro $\in$-máximo na ápice de α, *i.e.*, $\forall \beta \in \alpha\, \exists \gamma \in \alpha\, \beta < \gamma$. Neste caso $\alpha = \{\beta \mid \beta < \alpha\} = \{\beta \mid \exists \gamma \in \alpha\, \beta \in \gamma\} = \bigcup \alpha$. Se $\alpha = \bigcup \alpha$ falaremos que α é um *ordinal do tipo limite*.

Deveria acertar que se $\alpha = s(\beta)$, então $\beta = \bigcup \alpha$.

Exemplos. 1, 2, 3, ... são ordinais do tipo sucessor. ω é um ordinal do tipo limite. (E pela nossa definição, 0 é um ordinal do tipo limite também, embora é um caso especial e típicamente tratado em si próprio.)

Em geral, se x é um conjunto dos ordinais, $\bigcup x$ é o supremo dos ordinais no x, e se x é não vazio, $\bigcap x$ é o infimo dos ordinais no x, e também o membro mínimo de x. (Esta última é verdadeira porque já vimos que x tem um membro que é $\in$-mínimo quando $\emptyset \neq x \subseteq \mathrm{On}$, α, vamos falar, e então $\forall \beta \in x\, \alpha \leq \beta$ – *i.e.*, $\forall \beta \in x\, \alpha \in \beta$ ou $\alpha = \beta$, então $\alpha = \bigcap x$.)

2.5. Teoremas de recursão. Agora queríamos definir + e . nos ordinais, num modo similar ao que é normal fazer nos números naturais. Mas antes que podemos fazer isso precisamos saber que podemos fazer definições utlizando recursão e como fazer essas definições. Então esta seção é devotada para este tema. Talvez à primeira vista vai parecer um pouco mais técnica que as últimas, mas será muito lucrativa para nós no fim.

Teorema de recursão fraca. Sejam X, Y dois conjuntos. Seja $<$ uma relação bem-fundada sobre X, e seja $g : X \times \mathcal{P}(()Y) \longrightarrow Y$ uma função. Então existe uma única função $f : X \longrightarrow Y$ tal que $f(x) = g(x, \{f(z) \mid z < x\})$ para todos $x \in X$.

Demonstração. (Parte 1.) Falemos que $\phi : Z \longrightarrow Y$ é uma *tentativa* se Z é um segmento inicial de X e $\phi(x) = g(x, \{\,\phi(z) \mid z < x\,\})$ para todos $x \in Z$. Se $\phi_0 : Z_0 \longrightarrow Y$ e $\phi_1 : Z_1 \longrightarrow Y$ são duas tentativas, elas concordam no $Z_1 \cap Z_2$: $\phi_1 | Z_1 \cap Z_2 = \phi_2 | Z_1 \cap Z_2$. Porque $X_1 \cap X_2$ é claro um segmento inicial de X e se as tentativas não concordão existe um x_0 que é $<$-mínimo no $\{\,x \in Z_1 \cap Z_2 \mid \phi_1(x) \neq \phi_2(x)\,\}$. Mas neste caso temos $\phi_1(x_0) = g(x_0, \{\,\phi_0(x) \mid x < x_0\,\}) = g(x_0, \{\,\phi_1(x) \mid x < x_0\,\}) = \phi_2(x)$, uma contradição!

(Parte 2.) Agora seja $f = \bigcup\{\,\phi \mid \phi \text{ é uma tentativa}\}$, então $f(x) = \phi(x)$ se existe uma tentativa ϕ com $x \in \mathrm{dom}(\phi)$. É claro que $\mathrm{dom}(f) = \bigcup\{\,\mathrm{dom}(\phi) \mid \phi \text{ é uma tentativa}\}$ é um segmento inicial de X, e que f satisfaz $f(x) = g(x, \{\,f(z) \mid z < x\,\})$ para todos $x \in \mathrm{dom}(f)$. Então todo que ficar ser mostrado é que $\mathrm{dom}(f) = X$.

Mas fosse $\mathrm{dom}(f) \neq X$ existe x_0 que é $<$-mínimo no $\{\,x \in X \mid x \notin \mathrm{dom}(f)\,\}$. Para um tal x defina $\bar{f} : \mathrm{dom}(f) \cup \{\,x_0\,\} \longrightarrow Y$ pelo $\bar{f}(x) = f(x)$ se $x \in \mathrm{dom}(f)$ e $\bar{f}(x_0) = g(x_0, \{\,f(x) \mid x < x_0\,\})$. Seria claro que $\bar{f}$ seria uma tentativa, mas não um subconjunto de f. Contradição! Então $f : X \longrightarrow Y$ como desejamos.

Agora vamos ver um teorema de recursão mais forte que trata das classes.

Definição. Sejam A e B uns classes. Então $A \times B = \{\,(x,y) \mid x \in A \;\&\; y \in B\,\}$ é uma classe tambem, porque se $A = \{\,x \mid \phi(x, \bar{a})\,\}$ e $B = \{\,x \mid \psi(x, \bar{b})\,\}$ para dois fórmulas $\phi(x, \bar{a})$ e $\psi(x, \bar{b})$ na LTC, então $A \times B = \{\,z \mid z = \{\,\{\,x\,\}, \{\,x, y\,\}\,\} \;\&\; \phi(x, \bar{a}) \;\&\; \phi(y, \bar{b})\,\}$.

Seja A uma classe. $<$ uma *Relação bem-fundada* (nota o "R" maiúscula) sobre A se $<$ é uma subclasse do $A \times A$, $\forall a \in A\,\{\,b \in A \mid b < a\,\}$ é um conjunto, é qualquer B com $\emptyset \neq B \subseteq A$ tem elementos $<$-mínimos.

Sejam A, B uns classes. $G : A \longrightarrow B$ é uma *Função* (nota o "F" maiúscula) se G é uma subclasse de $A \times B$ e para cada $x \in A$ existe um único $y \in B$ tal que $(x, y) \in G$. Se $x \in A$, $y \in B$ e $(x, y) \in G$ (naturalmente) vamos escrever $G(x) = y$. (Nota falar que G é uma (sub)classe quer dizer que existe um fórmula $\chi(z, \bar{c})$ na LTC tal que $x \in G$ se e só se $\chi(x, barc)$ é verdadeiro.)

Lembrar que conjuntos são classes também e se A e B são conjuntos, então $A \times B$ é um conjunto, $<$ é uma relação bem-fundada e G é uma função, respectivamente.

Teorema de recursão forte. Seja $<$ uma Relação bem-fundada sobre uma classe A e seja $G : A \times V \longrightarrow V$ uma Função. Então existe uma Função única $F : A \longrightarrow V$ tal que para todos $x \in A$ temos que $F(x) = G(x, \{\,F(y) \mid y < x\,\})$.

Demonstração. (Parte 1.) O primeiro parte é exatamente como na teorema de recursão fraca. Defina ϕ ser uma tentativa se $\phi : B \longrightarrow V$, onde B é um *conjunto* que é um segmento inicial de A e $\phi(x) = G(x, \{\,\phi(y) \mid y < x\,\})$. Logo quaisquer duas tentativas concordam na intersecção dos segmentos iniciais deles.

(Parte 2.) Seja $F = \bigcup\{\,\phi \mid \phi \text{ é uma tentativa}\}$ (isto é $(x, z) \in F$ se existe uma tentativa ϕ com $\phi(x) = z$). Nota que a ultima vez este foi um conjunto, mas agora meromente temos que $F \subseteq \mathcal{P}(A \times V)$ e não sabemos que F é um conjunto, pois não será se A não é. No outro lado ainda temos que $F(x) = G(x, \{\,F(y) \mid y < x\,\})$ para todos $x \in \mathrm{dom}(F)$. Suponhamos que $\mathrm{dom}(F) \neq A$, e escolhe a_0 que é $<$-mínimo no conjunto $A \setminus \mathrm{dom}(F)$.

Agora temos que $\forall b < a_0\, \exists \phi\, (\phi$ é uma tentativa e $b \in \mathrm{dom}(\phi)$. Por isto podemos aplicar o axioma de coleção que dá $\exists v\, \forall b < a_0\, \exists \phi \in v\, (\phi$ é uma tentativa e $b \in \mathrm{dom}(f)$. Então $w = v \cap \{\, \phi \mid \phi$ é uma tentativa$\,\}$ é um *conjunto* pelo axioma de compreensão. Claro $f = \bigcup w$ é uma tentativa e podemos considerar $\bar{f} = f \cup \{\, (a_0, G(a_0, \{\, f(b) \mid b < a_0 \,\}))\,\}$ que é uma tentativa mas não é um subconjunto do f. Assim, como na teorema de recursão fraca temos uma contradição! Então $\mathrm{dom}(F) = A$.

Talvez você quer saber porque a demostração tem algumas mudanças de nossa demonstração anterior. Bem, você teria que saber que $G(a_0, \{\, F(a) \mid a < a_0 \})$ faria sentido antes de definir $\bar{F} = F \cup \{\, (a_0, G(a_0, \{\, F(a) \mid a < a_0 \,\}))\,\}$. E Para saber isso temia que saber que $\{\, F(a) \mid a < a_0 \,\}$ é um conjunto, que é uma conseqüência de aplicar o princípio de reposição para o conjunto $\{\, a \mid a < a_0 \,\}$. Então pode ver que não é possível evitar usar ou coleção ou reposição.

Eu deveria prevenir que não pode evitar usar coleção na teorema de recursão mesmo se A é um conjunto se G não é, e mesmo se $<$ é uma bem-ordem sobre A e não apenas uma relação bem-fundada.

2.6 Teoremas de comparação.

Definição. Uma função $f : (X, <_X) \longrightarrow (Y, <_Y)$ é um isomorfismo que preservar ordem se f é uma bijeção entre X e Y e $\forall x, y \in X\, (x <_X y \longleftrightarrow f(x) <_Y f(y))$.

Nota. Se $f : (X, <_X) \longrightarrow (Y, <_Y)$ é uma função que preservar ordem, f injetivo, ento s tem que saber que f tambm uma sobrejeo para saber que f um isomorfismo.

Teorema. Para qualquer conjunto bem-ordenado $(X, <)$ existe um ordinal único α para qual existe um isomorfismo (único) do $(X, <)$ para α que preserva ordem.

Demonstração. Definir, pela teorema de recursão, uma função $f : X \longrightarrow V$ (On) que satisfaz $f(x) = \{\, f(y) \mid y < x \,\}$.

(i) $\forall x \in X\; f(x) \in \mathrm{On}$. Senão, escolhe um x_0 que é $<$-mínimo no conjunto $\{x \in X \mid f(x) \notin \mathrm{On}\}$. Suponhamos que $x \in X$ e para todos $y < x$ temos que $f(y) \in \mathrm{On}$. Então $f(x) \subseteq \mathrm{On}$ pela definição de f, e $f(x)$ é bem-ordenado pela $\in$. Mas também, se $z \in y \in f(x)$, temos que $y = f(v)$ para alguma $v < x$. Logo $z \in \{\, f(u) \mid u < v \,\}$ e existe $u < v < x$ tal que $z = f(u)$. Conseqüentemente, $z \in f(x)$, e $f(x)$ é transitivo. Então $f(x) \in \mathrm{On}$. Logo, pelo princípio de indução para $<$, temos que $\forall x \in X\; f(x) \in \mathrm{On}$.

(ii) $\mathrm{im}(f)$ é um conjunto (pelos axiomas de coleção e compreensão ou pelo princípio de reposição), e (i) mostra que $\mathrm{im}(f) \subseteq \mathrm{On}$, então $\mathrm{im}(f)$ é bem-ordenado pelo $\in$. Suponhamos que $z \in y \in \mathrm{im}(f)$, então existe $x \in X$ tal que $z \in y = f(x)$, e logo existe $v \in X$ tal que $v < x$ e$z = f(v)$. Então $z \in \mathrm{im}(f)$ e $\mathrm{im}(f) \in \mathrm{On}$.

Finalmente se $g : X \longrightarrow \beta$ é um outro isomorfismo que preserva ordem, então $f \cdot g^{-1}$ seria um isomorfismo de β para α que preserva a ordem dada pelo $\in$. Então $\beta = \alpha$ e $f \cdot g^{-1}$ é igual para a funcão de identidade pela (o primerio corolário para) tricotomia.

Teorema de Comparação. Sejam $(X, <_X)$ e $(Y, <_Y)$ dois b.o.conjuntos. Então existe um isomorfismo que preservar ordem entre um deles e um segmento inicial do outro.

Demonstração. A teorema anterior fala que existem $\alpha, \beta \in \mathrm{On}$ e isomorfismos $f : (X, <_X) \longrightarrow \alpha$ e $g : (Y, <_Y) \longrightarrow \beta$ que preservam ordem. Agora vamos aplicar tricotomia. Se $\alpha = \beta$ temos que $g^{-1} \cdot f$ é um isomorfismo que preserva ordem entre $(X, <_X)$ e $(Y, <_Y)$. Se $\alpha \in \beta$ temos que $g^{-1} \cdot f$ é um isomorfismo que preserva ordem entre $(X, <_X)$ e um segmento inicial próprio de $(Y, <_Y)$ (do qual $g^{-1}(\alpha)$ é um sucessor). E se $\beta \in \alpha$ temos que $f^{-1} \cdot g$ é um isomorfismo que preserva ordem entre $(Y, <_Y)$ e um segmento inicial próprio de $(X, <_X)$ (do qual $f^{-1}(\beta)$ é um sucessor).

2.7. A Hierarquia do V_αs

Agora podmeos definir rigorosomente (dos axiomas) a hierarquia dos V_αs. Defina, pela teorema de recursão, uma Funcão $V : \mathrm{On} \longrightarrow V$ (a colecão de todos conjuntos) tal que $V_\alpha = \bigcup\{\mathcal{P}(V_\beta) \mid \beta < \alpha\}$.

Proposição. $\forall\alpha\, V_\alpha$ é transitivo.

Demonstração. Se não escolhe α (<-)mínimo tal que V_α não é transitivo. Já vimos (na primeira proposição de Seção (1.5)) que $\mathcal{P}(X)$ é transitivo se X é transitivo. Logo $\forall\beta < \alpha\ \mathcal{P}(V_\beta)$ é transitivo. Mas $V_\alpha = \bigcup\{\mathcal{P}(V_\beta) \mid \beta < \alpha\}$ é uma união dos conjuntos transitivos e, então, é transitivo também.

Proposição. Se $\alpha \leq \beta$ temos que $V_\alpha \subseteq V_\beta$.

Demonstração. Se $\alpha = \beta$ é trivial. Se $\alpha < \beta$, então $V_\alpha \subseteq \mathcal{P}(V_\alpha)$, porque V_α e, logo, $\mathcal{P}(V_\alpha)$ são transitivos, e $\mathcal{P}(V_\alpha) \subseteq V_\beta$.

Corolário. Se α é um ordinal do tipo sucessor, então $V_{s(\alpha)} = V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$.

Demonstração. $V_{s(\alpha)} = \bigcup\{\mathcal{P}(V_\beta) \mid \beta \leq \alpha\} = \bigcup\{\mathcal{P}(V_\beta) \mid \beta \leq \alpha\} \cup \mathcal{P}(V_\alpha)$. Mas $V_\beta \subseteq V_\alpha$ se $\beta < \alpha$, e então $\mathcal{P}(V_\beta) \subseteq \mathcal{P}(V_\alpha)$ se $\beta < \alpha$. Logo $\bigcup\{\mathcal{P}(V_\beta) \mid \beta \leq \alpha\} \subseteq \mathcal{P}(V_\alpha)$.

Corolário. Se λ é um ordinal do tipo limite, então $V_\lambda = \bigcup\{V_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$.

Demonstração. $\bigcup\{V_\alpha \mid \alpha < \lambda\} \subseteq V_\lambda = \bigcup\{\mathcal{P}(V_\alpha) \mid \alpha < \lambda\} = \bigcup\{V_{s(\alpha)} \mid \alpha < \lambda\} \subseteq \bigcup\{V_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ porque $s(\alpha) < \lambda$ se $\alpha < \lambda$.

Teorema. O axioma de fundação é equivalente para "$\forall x\, \exists\alpha \in \mathrm{On}\, x \in V_\alpha$."

Demonstração. "$\Longrightarrow$" Se não, seja x_0 $\in$-mínimo tal que $\forall\beta \in \mathrm{On}\ x \notin V_\beta$. Logo $\forall x \in x_0\, \exists\beta\, x \in V_\beta$. Se aplicamos o axioma de coleção temos $\exists v\, \forall x \in x_0\, \exists\beta \in v\, x \in V_\beta$. Seja $u = v \cap \mathrm{On}$. Logo $\forall x \in x_0\, \exists\beta \leq \sup(u)\, x \in V_\beta$, e este dá que $\forall x \in x_0\, x \in V_{\sup(u)}$. Segui que $x_0 \subseteq V_{\sup(u)}$, e então que $x_0 \in V_{s(\sup(u))}$. Contradição

"$\Longleftarrow$" Seja $A \neq \emptyset$ uma classe com $A \subseteq \bigcup\{V_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{On}\}$. Tome α mínimo tal que $A \cap V_\alpha \neq \emptyset$. Então qualquer $a \in A \cap V_\alpha$ é $\in$-mínimo no A.

Definição. Defina uma Função $\mathrm{rk} : V \longrightarrow V$ (On) pela $\mathrm{rk}(x) = \bigcup\{s(\mathrm{rk}(y)) \mid y \in x\}$, usando a teorema de recursão.

Proposição. (i) $\forall x \in V$ $\mathrm{rk}(x) \in \mathrm{On}$. (ii) $\mathrm{rk}(x) =$ o α mínimo tal que $x \subseteq V_\alpha$. (iii) $\mathrm{rk}(x) =$ o α mínimo tal que $x \in V_\alpha$.

Demonstração. Exercísio. (Usar indução sobre $(V, \in)$.)

2.8. Fechos transitivos.

Defina para cada conjunto, pela recursão sobre $(\omega, \leq)$, uma função $t(n, x)$ tal que $t(0, x) = x$ e $t(n+1, x) = t(n, x) \cup \bigcup t(n, x)$. No fim, defina $\mathrm{FT}(x) = \bigcup \{ t(n, x) \mid n \in \omega \}$. $\mathrm{FT}(x)$ o *fecho transitivo* de x

Proposição. Para cada x, $\mathrm{FT}(x)$ é o conjunto transitivo mínimo z com $x \subseteq z$. (Isto é, se y é transitivo e $x \subseteq y$, então $\mathrm{FT}(x) \subseteq y$.)

Demonstração. Seja $u \in v \in \mathrm{FT}(x)$. Então existe $n < \omega$ tal que $u \in v \in t(n, x)$. Então $u \in \bigcup t(n, x) \subseteq t(n+1, x) \subseteq \mathrm{FT}(x)$. Logo, $\mathrm{FT}(x)$ é transitivo.

Seja y transitivo com $x \subseteq y$. Vamos mostrar pela indução sobre ω que cada $t(n, x) \subseteq y$. É claro quando $n = 0$. Suponhamos que $t(n, x) \subseteq y$. Se $z \in t(n+1, x)$ temos ou $z \in t(n, x)$, quando $z \in y$, ou $z \in \bigcup t(n, x)$. Então existe alguma $v \in t(n, x)$ tal que $z \in v$. Mas se $z \in v \in t(n, x) \subseteq y$, temos que $z \in y$ pela transitividade de y. Então temos $t(n+1, x) \subseteq y$, e logo $\mathrm{FT}(x) = \bigcup t(n, x) \subseteq y$.

Proposição. O axioma de fundação para conjuntos (cada conjunto não vazio tem um membro $\in$-mínimo) implica o axioma de fundação para classes (cada classe não vazia tem um membro $\in$-mínimo).

Demonstração. Seja $A, \neq \emptyset$, uma classe. Seja $x \in A$. Ou x é $\in$-mínimo (acabamos) ou $x \cap A \neq \emptyset$. Então $\mathrm{FT}(x) \cap A \neq \emptyset$. Seja y $\in$-mínimo no conjunto $\mathrm{FT}(x) \cap A$. (Sabemos que é um conjunto pela propsição prévia.) Temos que $y \in A$. Agora suponhamos que $z \in y$. Então $z \notin \mathrm{FT}(x) \cap A$. Mas $z \in y \in \mathrm{FT}(x)$ é $\mathrm{FT}(x)$ é transitivo, então $z \in \mathrm{FT}(x)$. Logo $z \notin A$, e temos mostrado que y é $\in$-mínimo no A.

2.9. Aritmética dos ordinais: Adio dos ordinais.

Vamos usar recursão para definir adição e multiplicação sobre On.

Definição. Defina, para α fixo e β variável, $\alpha + \beta = \alpha \cup \{ \alpha + \gamma \mid \gamma < \beta \}$

Proposição. Sejam $\alpha, \beta \in \mathrm{On}$. Então $\alpha + \beta \in \mathrm{On}$.

Demonstração. Se não, seja β_0 mínimo com $\alpha + \beta_0 \notin \mathrm{On}$. Então para todos $\gamma < \beta_0$ temos que $\alpha + \gamma \in \mathrm{On}$, então $\alpha + \beta_0 = \alpha \cup \{ \alpha + \gamma \mid \gamma < \beta_0 \} \subseteq \mathrm{On}$ e, logo, é bem-ordendado pelo $\in$.

Agora vamos ver que $\alpha + \beta_0$ é transitivo, então pertence a On, dando uma contradição para a suposição que não pertence a On. Sejam $z \in y \in \alpha \cup \{ \alpha + \gamma \mid \gamma < \beta_0 \}$. Então, ou $y \in \alpha$, quando $z \in \alpha$, porque α é um ordinal, ou existe $\gamma < \beta$ tal que $y = \alpha + \gamma \in \mathrm{On}$, logo, de novo, $z \in \{\, \alpha + \delta \mid \delta < \gamma \,\}$. Em cada caso temos que $z \in \alpha + \{\, \alpha + \gamma \mid \gamma < \beta_0 \,\}$, dando a contradição desejeda. Logo $\alpha + \beta_0 \in \mathrm{On}$.

Lema. $\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathrm{On}$: (i) $\beta < \gamma \Longrightarrow \alpha + \beta < \alpha + \gamma$; (ii) $\alpha \leq \delta \Longrightarrow \alpha + \beta \leq \delta + \beta$.

Demonstração. (i) Se $\beta < \gamma$, então $\alpha + \beta \in \alpha + \gamma$.
(ii) Suponhamos que o Lema é falso para alguma par α e δ, e seja β_0 mínimo tal que $\alpha + \beta \not\leq \delta + \beta$. Então $\forall \beta < \beta_0$ temos que $\alpha + \beta \leq \delta + \beta$ e logo ou $\alpha + \beta = \delta + \beta$ ou $\alpha + \beta < \delta + \beta$, *i.e.* $\alpha + \beta = \delta + \beta$ ou existe $\gamma < \beta$ tal que $\alpha + \beta = \delta + \gamma$, ou $\alpha + \beta \in \delta$. Logo $\alpha + \beta_0 = \alpha \cup \{\, \alpha + \beta \mid \beta < \beta_0 \,\} \subseteq \delta \cup \{\, \delta + \gamma \mid \gamma < \beta_0 \,\}$ $= \delta + \beta_0$.

Proposição. (i) $\alpha + 0 = \alpha$; (ii) $\alpha + s(\beta) = s(\alpha + \beta)$; (iii) se λ é um ordinal do tipo limite, então $\alpha + \lambda = \bigcup \{\, \alpha + \gamma \mid \gamma < \lambda \,\}$.

Demonstração. (i) Trivial.
(ii) $\alpha + s(\beta) = \alpha \cup \{\, \alpha + \gamma \mid \gamma < s(\beta) \,\} = \alpha \cup \{\, \alpha + \gamma \mid \gamma < s(\beta) \,\} = \alpha \cup \{\, \alpha + \gamma \mid \gamma < \beta \,\} \cup \{\, \alpha + \beta \,\} =$ $(\alpha + \beta) \cup \{\, \alpha + \beta \,\} = s(\alpha + \beta)$.
(iii) Se $x \in \bigcup \{\, \alpha + \gamma \mid \gamma < \lambda \,\}$ então existe $\gamma < \lambda$ tal que $x \in \alpha \cup \{\, \alpha + \beta \mid \beta < \gamma \,\}$. Então $x \in \alpha \cup \{\, \alpha + \beta \mid \beta < \lambda \,\}$. Mas sabemos que $\lambda = \bigcup \lambda = \bigcup \{\, \gamma \mid \gamma < \lambda \,\}$, então se $x \in \alpha \cup \{\, \alpha + \beta \mid \beta < \lambda \,\}$ ou $x \in \alpha$ ou $x = \alpha + \beta$ para alguma $\beta < \lambda$ e existe $\gamma < \lambda$ tal que $\beta < \gamma$. Logo $x \in \bigcup \{\, \alpha + \gamma \mid \gamma < \lambda \,\}$.

Teorema. Sejam $\alpha, \beta \in \mathrm{On}$ e seja $\prec$ a ordem anti-lexicográfico sobre $\alpha \times \{\, 0 \,\} \cup \beta \times \{\, 1 \,\}$ definido pelo $(\gamma, i) \prec (\delta, j)$ se e s se ou $i < j$ ou $i = j$ e $\gamma < \delta$. Então esta ordem é isomorfico para $(\alpha + \beta\, in)$

Demonstração. Defina uma função $f : \alpha \times \{\, 0 \,\} \cup \beta \times \{\, 1 \,\} \longrightarrow \alpha + \beta$ pelo $f(\gamma, 0) = \gamma$ e $f(\delta, 1) = \alpha + \delta$. É claro que a f é sobrejetivo e também que $\prec$ é uma ordem total sobre $\mathrm{dom}(f)$. Vamos ver que $(\gamma, i) \prec (\delta, j)$ implica $f(\gamma, i) < f(\delta, j)$.

Se $i < j$ então $i = 0$ e $j = 1$, $f(\gamma, i) = \gamma$ e $f(\delta, j) = \alpha + \delta$ e temos que $\gamma < \alpha \leq \alpha + \delta$. Se $i = j = 0$, então $f(\gamma, i) = \gamma$ e $f(\delta, j) = \delta$ e temos $\gamma < \delta$. E se $i = j = 1$ temos que $\alpha + \gamma < \alpha + \delta$ pelo lemma anterior.

Nota. $1 + \omega = \omega$, enquanto $\omega + 1 = s(\omega)$, então $+$ não é comutativo em geral.

Proposição. Se $x \subseteq \mathrm{On}$ é um conjunto não vazio, então $\alpha + \bigcup x = \bigcup \{\, \alpha + \beta \mid \beta \in x \,\}$. ($+$ é contínuo no segundo lugar/variável.)

Demonstração. $\beta \in x$ implica que $\beta \leq \bigcup x$, e então $\forall \beta \in x\, (\alpha + \beta \leq \alpha + \bigcup x)$. Logo $\bigcup \{\, \alpha + \beta \mid \beta \in x \,\} \subseteq \alpha + \bigcup x$.

Seja $\rho = \bigcup \{\, \alpha + \beta \mid \beta \in x \,\}$ Se $\rho \in \alpha + \bigcup x$, então ou $\rho \in \alpha$ ou existe $\gamma \in \bigcup x$ tal que $\rho = \alpha + \gamma$. Se $\rho \in \alpha$, então $\forall \beta \in x\; \alpha + \beta \leq \rho < \alpha$, uma contradição. E se $\rho = \alpha + \gamma$ com $\gamma \in \bigcup x$, então existe

$\beta \in x$ tal que $\gamma < \beta$ e então $\rho < \alpha + \beta$ e $\rho < \bigcup\{\alpha + \beta \mid \beta \in x\} = \rho$, uma contradição de novo. Logo, $\rho \notin \alpha + \bigcup x$ e temos que $\rho = \alpha + \bigcup x$.

Podemos definir subtração também, mas pela falta de comutatividade de adição não é tão útil como adição.

Definição. $\alpha - \beta = \{\gamma \mid \beta + \gamma < \alpha\}$. Alternativemente pode definir $\alpha - \beta$ pela recursão: $\alpha - \beta = 0$ se $\beta > \alpha$ e $\alpha - \beta = \{\alpha - \gamma \mid \gamma < \beta\}$ se $\beta \leq \alpha$.

Proposição. Sejam α, $\beta \in \mathrm{On}$ e $\beta \leq \alpha$. Então $\beta + (\alpha - \beta) = \alpha$.

Demonstração. $\beta + (\alpha - \beta) = \beta \cup \{\beta + \gamma \mid \gamma < \alpha - \beta\} = \beta \cup \{\beta + \gamma \mid \beta + \gamma < \alpha\} \subseteq \alpha$. Suponhamos que $\beta + (\alpha - \beta) < \alpha$. Então $(\alpha - \beta) \in \{\gamma \mid \beta + \gamma < \alpha\} = \alpha - \beta$. Uma contradição. Logo $\beta + (\alpha - \beta) = \alpha$.

Nota. $(\alpha - \beta) + \beta \neq \alpha$ em geral. Por exemplo, $\omega - 1 = \omega$, logo $(\omega - 1) + 1 = s(\omega) \neq \omega$.

2.10 Aritmética dos ordinais: Multiplicação dos ordinais.

Pela teorema sobre recursão, definamos $\alpha.\beta = \{\alpha.\gamma + \delta \mid \gamma < \beta \;\&\; \delta < \alpha\}$.

Proposição. $\forall\alpha$, $\beta \in \mathrm{On}$ $(\alpha.\beta \in \mathrm{On})$.

Demonstração. Suponhamos que $\alpha.\gamma \in \mathrm{On}$ para cada $\gamma < \beta$. Então $\alpha.\gamma + \delta \in \mathrm{On}$ para cada $\gamma < \beta$ pela proposição que $\xi + \zeta \in \mathrm{On}$ se ξ, $\zeta \in \mathrm{On}$, e temos que $\alpha.\beta \subseteq \mathrm{On}$ e logo é bem-ordenado pelo $\in$. Também para cada $\gamma < \beta$ a função $f_\gamma : \alpha \longrightarrow \{\alpha.\gamma + \delta \mid \delta < \alpha\}$ dado pelo $f_\gamma(\delta) = \alpha.\gamma + \delta$ tem f_γ"$\alpha = \{\alpha.\gamma + \delta \mid \delta < \alpha\}$, e logo $\{\alpha.\gamma + \delta \mid \delta < \alpha\}$, A_γ vamos falar, é um conjunto pelo princípio de reposição. Então $\alpha.\beta = \bigcup A_\gamma \gamma < \beta$ é uma união dos conjunto e é um conjunto também. Finalmente, se $x \in y \in \alpha.\beta$, então existe $\gamma < \beta$ e $\delta < \alpha$ tal que $x \in y = \alpha.\gamma + \delta$. Então ou $x \in \alpha.\gamma$ ou existe $\sigma < \delta$ tal que $x = \alpha.\gamma + \sigma$. No primeiros caso existe $\epsilon < \gamma$ e $\tau < \alpha$ tal que $x = \alpha.\epsilon + \tau$. Então em cada caso temos que $x \in \alpha.\beta$. Porque agora temos que $\forall\beta\, (\forall\gamma < \beta\, (\alpha.\gamma \in \mathrm{On}) \longrightarrow \alpha.\beta \in \mathrm{On})$ temos que $\forall\beta \in \mathrm{On}\ \alpha.\beta \in \mathrm{On}$.

Lema. $\forall\alpha \in \mathrm{On}$ (i) $0.\alpha = 0$; (ii) $1.\alpha = \alpha$; (iii) $\forall\beta$, $\gamma \in \mathrm{On}$ $(\beta < \gamma) \Longrightarrow \alpha.\beta < \alpha.\gamma$; e (iv) $\forall\delta$ $\beta \in \mathrm{On}$, $(\alpha \leq \delta \Longrightarrow \alpha.\beta \leq \delta.\beta)$.

Demonstração. (i)–(iii) são óbvios. (iv) Suponhamos que α, $\delta \in \mathrm{On}$, $\beta \in \mathrm{On}$ e para todos $\gamma < \beta$ temos que $\alpha.\gamma \leq \delta.\gamma$. Usando o lema sobre adição na Seção (2.8), temos para todos $\gamma < \beta$ e todos $\epsilon < \alpha$ que $\alpha.\gamma + \epsilon \leq \delta.\gamma + \epsilon$. Então ou $\alpha.\gamma + \epsilon = \delta.\gamma + \epsilon$, quando $\alpha.\gamma + \epsilon \in \delta.\beta$, ou $\alpha.\gamma + \epsilon \in \delta.\gamma + \epsilon \in \delta.\beta$, e $\alpha.\gamma + \epsilon \in \delta.\beta$, pela transitividade de $\delta.\beta$. Em cada caso temos que $\alpha.\beta \subseteq \delta.\beta$ e então $\alpha.\beta \leq \delta.\beta$. Mas este mostrar que $(\forall\gamma < \beta\, \alpha.\beta \leq \delta.\gamma) \longrightarrow \alpha.\beta \leq \delta.\beta$. Então, porque $<$ é bem-fundado sobre os ordinais, $\forall\beta \in \mathrm{On}\, \alpha.\beta \leq \delta.\beta$.

Proposição. (i) $\alpha.0 = 0$; (ii) $\alpha.s(\alpha) = \alpha.\beta + \alpha$; e (iii) se $\lambda \in \mathrm{On}$ é do tipo limite, então $\alpha.\lambda = \bigcup\{\alpha.\gamma \mid \gamma < \lambda\}$.

Demonstração. (i) Trivial.
(ii) $\alpha.s(\beta) = \{\alpha.\gamma + \delta \mid \gamma \leq \beta \;\&\; \delta < \alpha\} = \{\alpha.\gamma + \delta \mid \gamma < \beta \;\&\; \delta < \alpha\} \cup \{\alpha.\beta + \delta \mid \delta < \alpha\} = \alpha.\beta + \alpha$.

Se λ é um ordinal do tipo limite, $\bigcup\{\,\alpha.\beta \mid \beta < \lambda\} = \{\,\alpha.\gamma + \delta \mid (\exists\beta < \lambda\, \gamma < \beta) \,\&\, \delta < \alpha\} = \{\,\alpha.\gamma + \delta \mid \gamma \in \bigcup\lambda \,\&\, \delta < \alpha\,\} = \{\,\alpha.\gamma + \delta \mid \gamma < \lambda \,\&\, \delta < \alpha\}$, com o último passo porque λ é do tipo limite.

Teorema. Sejam α, $\beta \in$ On e seja $\prec$ a ordem anti-lexicografico sobre $\alpha \times \beta$, definido pelo $(\delta_0, \gamma_0) \prec (\delta_1, \gamma_1)$ ou se $\gamma_0 < \gamma_1$ ou se $\gamma_0 = \gamma_1$ e $\delta_0 < \delta_1$. Então $(\alpha \times \beta, \prec)$ é isomorfico para $(\alpha.\beta, \in)$ pelo um isomorfismo que preserva ordem.

Demonstração. Defina $f : \alpha \times \beta \longrightarrow \alpha.\beta$ pelo $f(\delta, \gamma) = \alpha.\gamma + \delta$. É claro que f é uma sobrejeção. Se $(\delta_0, \gamma_0) \prec (\delta_1, \gamma_1)$ *ou* $\gamma_0 < \gamma_1$ quando $\alpha.\gamma_0 + \delta_0 < \alpha.s(\gamma_0) \leq \alpha.\gamma_1 \leq \alpha.\gamma_1 + \delta_1$, *ou* $\gamma_0 = \gamma_1$ e $\delta_0 < \delta_1$, quando $\alpha.\gamma_0 + \delta_0 < \alpha.\gamma_0 + \delta_1$ pela lema sobre adição. Logo, f preserva ordem, é então é um isomorfismo.

Nota. $2.\omega = \omega$, $3.\omega = \omega$, $\ldots$, mas $\omega.\omega \neq \omega$. Nota também que $(\omega + 1).\omega = \omega.\omega$

Teorema. Seja α, $\beta \in$ On, $\beta > 0$. Então existe únicos σ, τ com $\tau < \beta$ tal que $\alpha = \beta.\sigma + \tau$.

Demonstração. Sejam $\sigma = \{\,\gamma \mid \beta.s(\gamma) \leq \alpha\}$ e $\tau = \alpha - \beta.\sigma, = \{\,\delta \mid \beta.\sigma + \delta < \alpha\}$. Então $\alpha = \beta.\sigma + \tau$. Para ver que $\tau < \beta$, observe que se não ou $\beta = \tau$, quando $\alpha = \beta.\sigma + \beta = \beta.s(\sigma)$ ou $\beta \in \{\,\delta \mid \beta.\sigma + \delta < \alpha\}$ e, então, $\beta.\sigma + \beta = \beta.s(\sigma) < \alpha$. Logo em qualquer caso $\beta.s(\sigma) \leq \alpha$ e $\sigma \in \sigma$, uma contradição!

Proposição. Se $x \subseteq$ On então $\alpha.\bigcup x = \bigcup\{\,\alpha.\beta \mid \beta \in x\}$. (Que quer dizer que . é continuo no segundo lugar/variável.)

Demonstração. $\alpha.\bigcup x = \{\,\alpha.\gamma{+}\delta \mid \delta < \alpha \,\&\, (\exists\beta \in x\, \gamma < \beta)\,\} = \{\,\alpha.\gamma{+}\delta \mid \exists\beta \in x\, (\gamma < \beta \,\&\, \delta < \alpha)\}$ $= \bigcup\{\,\alpha.\beta \mid \beta \in x\}$.

Nota. Na teorema prévio $\sigma = \bigcup\{\,\gamma \mid \beta.\gamma \leq \alpha\}$.

Aritmética dos ordinais: 2.11 Exponenciação dos ordinais.

Agora podemos fazer mais uma definição pelo teorema sobre recursão, da exponciação.

Definição. Seja α, $\beta \in$ On. Então $\alpha^\beta = \{0\} \cup \{\,\alpha^\gamma.\delta + \epsilon \mid \gamma < \beta \;\&\; \delta < \alpha \;\&\; \epsilon < \alpha^\gamma\,\}$.

Proposição. Seja α, $\beta \in$ On. Então $\alpha^\beta \in$ On.

Lema. $\forall\alpha, \beta, \gamma\; \delta \in$ On temos (i) $\alpha^\beta.\alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$; (ii) $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta.\gamma}$; (iii) $\beta < \gamma \Longrightarrow \alpha^\beta < \alpha^\gamma$; e (iv)

$\alpha \leq \delta \Longrightarrow \alpha^\beta \leq \delta^\beta$.

Proposição. Seja $\alpha \in$ On. (i) $\alpha^0 = 1$; (ii) $\alpha^{s(\beta)} = \alpha^\beta.\alpha$ para cada $\beta \in$ On; e (iii) se λ é um ordinal do tipo limite, então $\alpha^\lambda = \bigcup\{\, \alpha^\gamma \mid \gamma < \lambda\}$.

As demonstraçes são similares para as demonstraçes dos equivalentes para .. Pode confirmá-las se quiser.

Nota. $\forall n \in \omega\; n^\omega = \omega$, mas $\omega^\omega \neq \omega$, enquanto $\omega.\omega^\omega = \omega^\omega$. E se definimos $\epsilon_0 = \bigcup\{\, \omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \ldots\}$, então $\omega^{\epsilon_0} = \epsilon_0$.

Quando você voltar para esta Seção mas tarde você deveria lembrar que todos estes fatos são para exponenciação dos *ordinais*, que é muito diferente da teoria da exponenciação dos *cardinais* que veremos no Capítulo (4).