Teoria dos conjuntos

Charles Morgan*

Plano do curso:

(1) Introdução informal para os axiomas.
(2) Ordinais, relações bem-fundadas.
(3) Axioma de escolha, aritmético de cardinais
(se temos tempo) (4) Combinatória infinita.
(se temos tempo) (5) Uma olhada rápida à lógica matemática elementaria e aplicações dela para teoria de conjuntos.

Livros:

Infelizmente é difícil recomendar quaisquer livros em português para vocês. Há traduções dos livros de Halmos e Lifshutz. O livro de Lifshutz é ruim e o de Halmos, enquanto na época (no inicio dos anos 60) não foi tão ruim, agora é muito antiquado. Há, também, um livro de Francisco Miraglia da USP. Isso, ao menos, cobre a maioria das coisas nas nossas seções (1)-(3), mas sem muito inspiração.

Francisco Miraglia, *Teoria dos conjuntos: um curso breve*, Ed. USP, 1997.

Em inglês tem mais possibilidades. Entre elas eu aconselharia:

Keith Devlin, *Fundamentals of Contemporary Set Theory*, (Springer, 1979). (Acho muito bom sobre ordinais e cardinais, mas não tão bom, talvez, na parte da introdução dos axiomas.)
Herb Enderton, *Elements of Set Theory*, (Academic, 1977). (Bom, claro, mas talvez não muito vivaz.)
Andras Hajnal e Peter Hamburger, *Set Theory*. (Cambridge University Press, LMS Lecture Notes Series, vol. 48, 1999). (Claro e também interessante.)
Judy Roitman, *Introduction to Modern Set Theory*. (Wiley, 1990) (Também uma boa escolha.)

Tenho uma fotocópia do livro de Devlin que vocês podem usar e uma cópia, que botarei na biblioteca, do livro de Hamburger e Hajnal deverá chegar logo – espero no fim de semana.

Tem na biblioteca, também, uma ótima introducão para lógica matemática–para mim a melhor,

Dirk van Dalen, *Logic and Structure*, Springer. (Ótimo. Muito interessante em se mesmo, e boa para clarificar as coisas em (5) em cima sobre quais só teremos tempo de tocar levemente.)

* versão 1.2, 2/12/00

Capítulo 1. Introdução informal para os axiomas de ZF.

1.1. Extensão. Nosso concepção de conjuntos vem dos conjuntos de objetos que conhecemos, como $\mathbf{N}$, $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$, e subconjuntos deles que podemos formar, que são determinados pelas propriedades dos objetos. Para dar duas exemplos muito simples:

$$\{\, r \in \mathbf{R} \mid 0 \leq r \,\} = \{\, r \in \mathbf{R} \mid r \text{ tem uma raiz quadrada em } \mathbf{R} \,\}$$

$$\{\, x \mid x \neq x \,\} = \{\, n \in \mathbf{N} \mid n \text{ é par, mas que 2 e um primo} \,\}.$$

(Esse último exemplo dá duas definicões de *conjunto vazio*, $\emptyset$).

A noção de conjunto é uma abstração da noção de propriedade. Então, se X, Y são conjuntos temos $\big(\forall x \,(\, x \in X \iff x \in Y)\big) \implies X = Y$.

Pode notar immediatemente que isso implica que o conjunto vazio é único:

1.2. Uniões. Logo que temos conjuntos como objetos podemos considerar conjuntos de conjuntos, por exemplo: $\{\, x_i \mid i \in I \,\}$ por I alguma conjunto de indices. Temos o conjunto que consiste em todos objetos que pertencem para qualquer x_i por $i \in I$. O conjunto indexando I não é relevante para nós, então $\bigcup\{\, x_i \mid i \in I \,\} = \bigcup_{i\in I} x_i$ pode ser escrito $\bigcup X$, onde $X = \{\, x_i \mid i \in I \,\}$.

Tipicamente vamos usar a, b, c, w, x, z, $\ldots$ como nomes de conjuntos, e podemos escrever $\bigcup x = \bigcup\{\, z \mid z \in x \,\} = \{\, w \mid \exists z \text{ tal que } w \in z \text{ e } z \in x \,\}$. Ou simplesmente: $\bigcup x = \{\, w \mid \exists z \in x \; w \in z \,\}$.

(Para explicar isso de novo temos

$$\bigcup_{y \in x} y = \bigcup\{\, y \mid y \in x \,\} = \bigcup\{\, z \mid \exists y \in x \; z \in y \,\}.$$

Então já mudamos nosso pensamento de pensar sobre conjuntos e elementos como coisas diferentes para pensar sobre todos conjuntos como coisas do mesmo tipo onde conjuntos pertencem para outras conjuntos.)

1.3. Conjuntos de potência Se x é um conjunto então $\mathcal{P}(X) = \{\, Z \mid Z \subseteq X \,\}$, o conjunto de todos os subconjuntos de x é também um conjunto.

Proposição. (Cantor) Não existe uma sobrejeção $f : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ (uma função $f : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ tal que por todos $Z \in \mathcal{P}(X)$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = Z$.

Demonstração. Se f fosse uma tal sobrejeção poderíamos considerar $\{\, x \in X \mid x \notin f(x) \,\}, = A$, vamos falar. Como $A \subseteq X$ temos que $A \in \mathcal{P}(X)$ e logo existe $a \in X$ tal que $A = f(a)$ desde que f é uma sobrejeção. Mas olhe, agora temos $a \in A$ se e só se $a \notin A$, uma contradição!

Corolário. A coleção de todos conjuntos não é um conjunto.

Demonstração. Vamos chamar a coleção de todos conjuntos por U no momento. Se U fosse um conjunto $\mathcal{P}(U)$ seria um conjunto também. Mas $\mathcal{P}(U)$ seria o conjunto de todos os subconjuntos de U, então para todos $x \in \mathcal{P}(U)$ teríamos $x \in U$ e logo teríamos $\mathcal{P}(U) \subseteq U$. Então existe uma sobrejeção $f : U \longrightarrow \mathcal{P}(U)$ dado pelo $x \mapsto x$ se $x \in \mathcal{P}(U)$ e $x \mapsto \emptyset$ se $x \notin \mathcal{P}(U)$. Contradição!

Frase de propoganda: "Não existe um conjunto universal!"

Esse corolário é as veces chamado *o paradoxo de Cantor*. O *paradoxo de Russell* pode ser obtido por botando f igual à função de identidade na demonstração de proposição em cima para ver que não existe um coleção $\{x \mid x \notin x\}$. (Isto é, se $\{x \mid x \notin x\}, = r$, vamos falar, fosse um conjunto, então a pergunta de se $c \in c$ ou $c \notin c$ daria a mesma contradição.) Claro, não são paradoxos de verdade, mas só fatos impressionantes/memoraveis.

O "paradoxo de Russell" mostra que não pode esperar para usar a extensão de todas propriedades matematicamente–algumas são inerentemente contradictória–e então dá uma razão porque vale a pena desenvolver a teoria dos conjuntos. Porém, eu deveria falar que a teoria de conjuntos começou e continua ser interessante e útil **não** para evitar paradoxos ou dar fundações ou saúde matemática, **mas** como uma parte da matemática (como as outras) com sua própria teoria, perguntas, etc., e com ligações matemáticas (no mesmo modo como as outras) com outros áreas.

1.4. Hierarquia cumulativa. Vamos ver o que podemos pegar com o conjunto vazio, conjuntos de potência e uniões, Começemos com $V_0 = \emptyset$ e apliquemos $\mathcal{P}$ repetidamente.

$$\begin{aligned}
V_0 &= \emptyset \\
V_1 &= \mathcal{P}(V_0) = \{\emptyset\} \\
V_2 &= \mathcal{P}(V_1) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
V_3 &= \mathcal{P}(V_2) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Depois de todo estes passos finitos, juntemos tudo que já temos: $V_\omega = \bigcup\{V_n \mid n \text{ é finito}\}$.

Agora podemos começar aplicar $\mathcal{P}$ de novo: $V_{\omega+1} = \mathcal{P}(V_\omega)$, $V_{\omega+2} = \mathcal{P}(V_{\omega+1})$, $\ldots$

Pode "gerar" conjuntos em sua imaginação "para sempre."

(Os "V"s são por *von Neumann*, a primeira pessoa a pensar nissa hierarquia.)

Definição. Um *conjunto (puro)* é um membro de alguma V_α.

(Na verdade, o uso conjunto "puro" hoje parece muita antiquada – quase-ninguem fala isso e só mencionei o uso caso você encontre tal coisa num livro.)

O *universo* de conjuntos (gerado de $\emptyset$) é a coleção $V = \{x \mid \exists\alpha\,(\alpha \text{ indexa um passo na iteração} \;\&\; x \in V_\alpha)\}$. Como giria podemos falar que $V =$ "$\bigcup$"$\{V_\alpha \mid \alpha \text{ indexa um passo na iteração}\}$, mas como vimos, V não é um conjunto e este "união" não é uma união de um conjunto – temos que cada V_α é um conjunto mas não podemos tomar a união propriamente dita deles e formar V *como um conjunto*. Então temos que pensar sobre V como uma entidade não completado, e aí, V deve ser só uma abreviatura para nós – só vamos usa-la (mas tarde) nas coisas como "$x \in V$" querendo dizer "existe α tal que $x \in V_\alpha$." Mas mesmo assim é útil ter um nome na mão por esta coleção de todos conjuntos.

Proposição. Se α vem antes de β como um indice temos $V_\alpha \subseteq V_\beta$.

Demonstração. É óbvio se $\alpha = \beta$. Se V_β foi gerado pelo processo de tomar uma união também é claro (porque $V_\alpha \in \{V_\gamma \mid \gamma \text{ é antes de } \beta \text{ como um indice}\}$ e então se $x \in V_\alpha$ temos que $x \in \bigcup\{V_\gamma \mid \gamma \text{ é antes de } \beta \text{ como um índice}\}$).

Todávia, se $V_\beta = \mathcal{P}(V_\gamma)$ por alguma γ temos que saber que $V_\alpha \subseteq V_\gamma \Longrightarrow V_\alpha \subseteq \mathcal{P}(V_\gamma)$. Então vou interromper a demonstração por uma definição.

1.5 Conjuntos transitivos.

Definição. Um conjunto x é *transitivo* se $u \in v \in x \Longrightarrow u \in x$ (se e só se $u \in x \Longrightarrow u \subseteq x$, se e só se $\bigcup x \subseteq x$).

Para acabar a demonstração basta mostrar que cada V_α é transitivo. Porque, como $V_\alpha \subseteq V_\gamma$ temos $x \in V_\alpha \Longrightarrow x \in V_\gamma$, e se V_γ é transitivo temos $x \in V_\gamma \Longrightarrow x \subseteq V_\gamma$. Então $x \in V_\alpha \Longrightarrow x \subseteq V_\beta$. Mas $x \in V_\alpha \Longrightarrow x \subseteq V_\beta$ se e só se $V_\alpha \subseteq \mathcal{P}(V_\gamma)$, que é o que quisemos mostrar.

Mas todos V_α são transitivos pela proxima proposição.

Proposição. (i) $\emptyset$ é transitivo. (ii) Se x é transitivo então $\mathcal{P}(x)$ é transitivo. (iii) Uniões de conjuntos transitivos são transitivos.

Demonstração. (i) e (iii) são cada um triviais. (Pode ver porque?) (ii) Se $u \in v \in \mathcal{P}(x)$, temos $u \in v \subseteq x$ e então $u \in x$. Mas desde x é transitivo temos que $u \subseteq x$. Então $u \in \mathcal{P}(x)$.

Então podemos ver que todo V_α é transitivo indutivamente usando a proposição. E assim acabo a demonstração que se α é antes de β temos $V_\alpha \subseteq V_\beta$, por indução nos índices.

NOTA! Para falar que x é transitivo não quer dizer que $\in$ é uma relação transitivo sobre x ou qualquer coisa similar.

Usaramos implicitamente o princípio indutivo que $\forall\alpha\,\big((\forall\beta < \alpha\,\mathrm{Pr}(\beta)) \longrightarrow \mathrm{Pr}(\alpha)\big) \longrightarrow \forall\alpha\,\mathrm{Pr}(\alpha)$, onde $\mathrm{Pr}(.)$ é uma propriedade de nossos índices. Vamos usar este princípio mostrar a seguinte:

Proposição. ($\in$-induction) $\forall x\,\big((\forall u \in x\,\phi(u)) \longrightarrow \phi(x)\big) \longrightarrow \forall x\,\phi(x)$, por qualquer propriedade ϕ.

Demonstração. Mostremos por indução no α que $\forall x \in V_\alpha\,\phi(x)$. Daremos este, $\forall x \in V_\alpha\,\phi(x)$, o nome $\mathrm{Pr}(\alpha)$. Para nosso princípio é bastante mostra que para cada α temos $\forall\beta < \alpha\,\mathrm{Pr}(\beta)) \longrightarrow \mathrm{Pr}(\alpha)$.∎

Assim, suponha que $\forall\beta < \alpha\,\mathrm{Pr}(\beta)$. Tome $x \in V_\alpha$. Tem dois casos.

Ou $V_\alpha = \mathcal{P}(V_\beta)$ para um β menor que α, quando $x \subseteq V_\beta$ e para todos $u \in x$ temos $\phi(u)$. Então usando o antecedente para x temos $\phi(x)$. Porque x era arbitrário temos $\forall x \in V_\alpha\,\phi(x)$, *i.e.*, $\mathrm{Pr}(\alpha)$.

Ou $V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta$, quando existe $\beta < \alpha$ tal que $x \in V_\beta$. Como já sabemos $\mathrm{Pr}(\beta)$ temos $\phi(x)$. De novo, porque x era arbitrário temos $\forall x \in V_\alpha\,\phi(x)$, *i.e.*, $\mathrm{Pr}(\alpha)$.

Como α era arbitrário temos $\forall\alpha\,\big((\forall\beta < \alpha\,\mathrm{Pr}(\beta)) \longrightarrow \mathrm{Pr}(\alpha)\big)$. E agora podemos deduzir que

$\forall \alpha \, \mathrm{Pr}(\alpha)$, e então $\forall \alpha \, \forall x \in V_\alpha \, \phi(x)$, e assim $\forall x \, \phi(x)$.

Para evitar fazer muitas demonstrações como esta usemos um princípio, Fundação, equivalente para $\in$-indução:

$(\star)$ Se A é uma propriedade dos conjuntos e existe x tal que $A(x)$ então existe x tal que $A(x)$ e para todos $u \in x$ não temos $A(u)$. Simbôlicamente: $\exists x \, A(x) \implies \exists x \, A(x) \,\&\, \forall y \in x \, \neg A(y)$

Nota. Temos a idéia que para qualquer coisa tem que ser um passo o mais cedo em qual a coisa acontece.

Temos duas problemas mais:

(1) Que são as propriedades da hierarquia?
(2) Quanto longe persistir a hierarquia?

Resposta para (2) (parte (a)).

1.6 Infinidade. Precisamos de alguns números naturais. Aqui estão:

$$\begin{aligned} 0 &= \emptyset \\ 1 &= \{0\} \\ 2 &= \{0, 1\} \\ 3 &= \{0, 1, 2\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Nota que se definirmos $s(x) = x \cup \{x\}$ temos $s(n) = n + 1$ para cada n.

Queríamos também um conjunto dos números naturais: $\mathbf{N} = \omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Assim gostaríamos que $\omega = \bigcap\{x \mid 0 \in x \,\&\, \forall u \in x\; s(u) \in x\}$.

Mas são quaisquer conjuntos infinitos? Bem, sim – mas temos que estipular que existem.

Infinidade. $\exists x\, (\emptyset \in x \,\&\, \forall u \in x\; s(u) \in x)$.

(Nota. V_ω é um tal x.)

Outras noções de infinidade. (1) Infinito = não finito: "$\exists x\, \forall n \in \omega\; x \not\sim n$" onde $x \sim u$ se e só se $\exists f : x \longrightarrow y$ e f é uma bijeção. (Em palavras: Existe x não numa bijeção com qualquer número natural.) Mas para falar isso precisamos de funções que até agora não temos definidas.

(2) Infinidade do tipo Dedekind: "$\exists x\, \exists u \subseteq x\, (x \neq u \,\&\, x \sim u)$." (Em palavras: Existe um conjunto com um subconjunto não igual ao conjunto mas do mesmo tamanho.)

Se um conjunto é infinito de tipo Dedekind é infinito. Na outra direção, se um conjunto é infinito, é infinito de tipo Dedekind, mas este precisa de uma pequena porção de axioma de Escolha (para mostrar que se x não é finito x conte um subconjunto enumerável).

Não se preocupa se a última frase não quis dizer muito para você agora... não é uma grande coisa e não vai ser importante para nós. Em qualquer caso, nosso axioma para estipular que temos conjuntos infinitos vai ser o primeiro que dei.

1.6. A língua da teoria dos conjuntos e propriedades. Propriedades são as propriedades que são definíveis numa língua, a língua de teoria dos conjuntos–LTC, com parâmetros entre conjuntos. Podemos escolher a língua de teoria dos conjuntos para ser muito simples. LTC tem:

(i) variáveis: u, v, x, z, ...
(ii) símbolos para relações: $=$, $\in$
(iii) ligações de lógica das proposições: & (e), $\mathtt{v}$ (ou), $\longrightarrow$ (implica), $\neg$ (não), $\longleftrightarrow$ (se e só se)
(iv) quantificadores: $\forall x$ (para todos x), $\exists x$ (existe x).

Nota: se temos um conjunto a temos que $\{x \mid a \in x\}$ é uma propriedade e não um conjunto.

Com sorte você entende esta língua informalmente, e então pode raciocinar usando-o. (Se quer entender melhor como fazer estes tipos das coisas mais formalmente deve dar uma olhada no livro do van Dalen.)

Vamos usar algumas abreviaturas naturais:
$x \neq z$ em vez de $\neg(x = z)$
$x \notin z$ em vez de $\neg(x \in z)$
$\forall x \in z\, \phi(x)$ em vez de $\forall x\, (x \in z \longrightarrow \phi(x))$
$\exists x \in z\, \phi(x)$ em vez de $\exists x\, (x \in z \;\&\; \phi(x))$
$\exists! x\, \phi(x)$ em vez de $\exists x\, (\phi(x)) \;\&\; \forall z\, (\phi(z) \longrightarrow z = x)$, e assim por diante. (Também muitas vezes usarei "ou" em vez de "$\mathtt{v}$" para evitar confusão entre "$\mathtt{v}$" e "v.")

Introdução de símbolos por relações e funções. Se tenho um fórmula $\phi(x)$ em LTC, pois posso introduzir um símbolo novo $R_\phi(x)$ por uma relação e um axioma $\forall x(R_\phi(x) \longleftrightarrow \phi(x))$. Isso não muda o poder de expressão da língua (o que pode falar na língua). Por exemplo: poderia bota $x \subseteq z$ se e só se $\forall u \in x\, u \in z$, onde $\subseteq$ é nosso símbolo novo.

Similarmente, se temos $\phi(x_0, \ldots, x_{k-1}, z)$ e podemos mostrar (de algumas axiomas) que, escrevendo $\overrightarrow{x}$ por $x_0, \ldots, x_{k-1}$, $\forall \overrightarrow{x}\, \exists! z\, \phi(\overrightarrow{x}, z)$, podemos introduzir um símbolo $f_\phi(z)$ por uma função e um axioma $\forall \overrightarrow{x}, y\, (\phi(\overrightarrow{x}, y) \longleftrightarrow f(\overrightarrow{x}) = y)$. De novo isso não muda o que a língua pode expressar.

Vou dar alguns exemplos do uso deste língua. Como já encontramos a majoria dos axiomas de Zermelo-Fraenkel parece uma boa coisa usá-los como nesses exemplos.

1.7 Axiomas de teoria dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZF)

Os axiomas são (em breve):

Extensão
Conjunto Vazio
Pares (se temos dois conjuntos temos também o conjunto para quem pertencem exatamente os dois conjuntos)
Infinidade
Uniões
Conjuntos de potência
Compreensão (ou formação de subconjuntos)
Coleção (até agora não discutido)
$\in$-indução **ou** Fundação: Se A não é vazio então A tem um componente que é mínimo em $\in$ ($\in$-mínimo).

Zermelo produz todos além de Coleção e então o sistema sem Coleção e chamado theoria dos conjuntos de Zermelo (Z).

Exercício. Mostrar que Z e verdadeiro em $V_{\omega+\omega}$.

E agora de novo, usando LTC, e com algumas comentarios.

Extensão. $\forall x\, \forall y\, \big(\forall z\, (z \in x \longleftrightarrow z \in y\big) \longrightarrow x = y)$.

Conjunto Vazio. $\exists x\, \forall y\, (y \notin x)$.
Por o axioma de extensão $\exists! x\, \forall y\, (y \in x)$. Assim podemos introduzir um novo símbolo por um constante $\emptyset$ tal que $\forall y\, y \notin \emptyset$. (Um constante é meramente uma função de 0 variáveis.)

Pares. $\forall x\, \forall y\, \exists! z\, \forall u\, (u \in z \longleftrightarrow u = x \text{ v } u = y)$.
Podemos introduzir um simbolo por uma função $\{.,.\}$ com $\forall u\, (u \in \{x, y\} \longleftrightarrow u = x \text{ v } u = y)$. (A par de dois conjuntos é único por extensão.)

Agora podemos ver que $\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ e então $1 \in 2$ (introduzindo os simbolos 1 e 2 por constantes no modo óbvio por estes conjuntos).

Uniões. $\forall x \, \exists z \, (u \in z \longleftrightarrow \exists y \in x \, (u \in y))$.
De novo podemos introduzir um símbolo, $\bigcup$ por uma função e temos $\forall x \, (u \in \bigcup x \longleftrightarrow \exists y \in x \, u \in y)$.

Conjunto de potência. $\forall x \, \exists! z \, (y \in z \longleftrightarrow \forall u \in y \, (u \in x))$.
De novo vamos introduzir um símbolo $\mathcal{P}$ com efeito que $z \in \mathcal{P}(x) \longleftrightarrow z \subseteq x$.

Infinidade. $\exists x \, (\emptyset \in x \;\&\; \forall y \in x \, (y \cup \{ y \} \in x))$.
Assim podemos introduzir um símbolo novo por uma função e tomar que $s(y) = y \cup \{ y \}$ e ω com $u \in \omega \longleftrightarrow \forall x \, ((\emptyset \in x \;\&\; \forall y \in x \, (y \cup \{ y \} \in x)) \longrightarrow u \in x)$. Com dois passos mais podemos falar que $\omega = \bigcap \{ x \mid \emptyset \in x \;\&\; \forall y \in x \, (y \cup \{ y \} \in x) \}$.

Compreensão e classes. Por uma propriedade de conjuntos quero dizer alguma fórmula $\phi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{a})$ onde $\overrightarrow{a} = a_0, \ldots, a_{n-1}$ são nomes por alguns conjuntos específicos. A propriedade é verdadeira de $b_0, \ldots, b_{m-1} = \overrightarrow{b}$ se e só se $\phi(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a})$ é verdadeiro. A *extensão* de uma propriedade é a coleção dos conjuntos de quais a propriedade é verdadeira. Este coleção é uma subcoleção de V, a coleção de todos conjuntos. Chamamos a extensão de uma propriedade uma classe. Assim uma classe é uma coisa de tipo $\{ x \mid \phi(x, \overrightarrow{a}) \}$.

Axioma de Compreensão. Para todas fórmulas $\phi(x, \overrightarrow{y})$ na língua de teoria dos conjuntos temos $\forall x \forall a_0, \ldots, \forall a_{n-1} \, \exists y \, \forall z (z \in y \longleftrightarrow z \in x \;\&\; \phi(z, \overrightarrow{a}))$.

Nota, este "axioma" é na verdade uma esquema dos axiomas: temos uma axioma para todas fórmulas $\phi(x, \overrightarrow{y})$ na LTC, e não um axioma só.

Em efeito o esquema fala que para todos x temos que cada $x \cap \{ z \mid \phi(z, \overrightarrow{a}) \}$ é um conjunto. Então uma classe $\{ x \mid \phi(x, \overrightarrow{a}) \}$ é um conjunto (no sentido que $\exists z \, \forall x \, (x \in z \longleftrightarrow \phi(x, \overrightarrow{a}))$ se e só se $\{ x \mid \phi(x, \overrightarrow{a}) \} \subseteq V_\alpha$ por alguma α. *I.e.*, $\{ x \mid \phi(x, \overrightarrow{a}) \}$ é um conjunto se e só se é limitado na hierarquia.

É muito útil (como vamos ver logo) poder usar várias classes como abreviaturas informais–todo mondo faz isso e vamos fazer isso também. Só que você deveria ficar cauteloso para o fato de que as classes são só abreviaturas e seus usos sempre podem ser eliminados em favor de falar sobre as fórmulas de LTC que define elas.

Por exemplo, se $A = \{ x \mid \phi(x, \overrightarrow{a}) \}$ é uma classe, pode usar $b \in A$ como abreviatura por $\phi(b, \overrightarrow{a})$ sendo verdadeiro, mas não pode pensar sobre se $A \in A$. Este ultima não é falsa, mas *não tem sentido*. Similarmente, $P(A)$ não tem sentido.

Se ainda tem perguntas ou dúvidas sobre como usar ou pensar de classes, espere um pouquinho e depois de termos usados classes um pouco acho que coisas aparecerão mas claras.

(Nota técnica: aqui tomamos fórmulas $\phi(x, \overrightarrow{y})$ na LTC tal que as variáveis $y_0, \ldots, y_{n-1}$ são *livres*, *i.e.* podemos botar $a_0, \ldots, a_{n-1}$ na fórmula em vez de $y_0, \ldots, y_{n-1}$ sem problemas. Por exemplo, cada y_i não ocorre na forma $\exists y_i \ldots$ ou $\forall y_i$. Para mais informação sobre variáveis livres e uma definição indutiva formal do que são variáveis livres veja o livro de van Dalen ou a seção mais tarde sobre lógica matemática.)

Fundação. Para todas fórmulas $\phi(x, \overrightarrow{a})$ na LTC $\exists y\, \phi(y, \overrightarrow{a}) \longrightarrow \exists y\, \phi(y, \overrightarrow{a})\ \&\ \neg\exists z \in y\, \phi(z, \overrightarrow{a})$.

Usando classes como abreviaturas este fala que se A é uma classe e não é vazio então A tem um componente que é mínimo em $\in$ ($\in$-mínimo).

Quanto alto é a hierarquia? (b) Suponha que $\forall x \in u\, \exists y\, \phi(x, y, \overrightarrow{a})$. Para cada x existe um primeiro α_x tal que $\exists y \in V_{\alpha_x}\, \phi(x, y, \overrightarrow{a})$ (isso por o axioma da fundação). Então temos uma função mandando u para $\{\, \alpha_x \mid x \in u \,\}$ dado por $x \mapsto \alpha_x$. Assim $\{\, \alpha_x \mid x \in u \,\}$ é um "conjunto" de níveis, e então existe um β tal que $\alpha_x < \beta$ para todos $x \in u$. Assim temos $V_{\alpha_x} \in V_\beta$ para todos $x \in u$. Se botarmos $v = V_\beta$ temos $\exists v\, \forall x \in u\, \exists y \in v\, \phi(x, y, \overrightarrow{a})$.

Ora! Precisamos de um axioma (bem, em verdade um esquema dos axiomas, mais uma vez) para fazer este "coleta" que dá para nós o conjunto de níveis que usamos em cima.

Axioma de Coleção. Para todas fórmulas $\phi(x, y, \overrightarrow{z})$ na LTC (com $\overrightarrow{z}$ variáveis livres) temos o seguinte:
$$\forall \overrightarrow{a}\, \forall u (\forall x \in u\, \exists y\, \phi(x, y, \overrightarrow{a}) \longrightarrow \exists v \forall x \in u\, \exists y \in v\, \phi(x, y, \overrightarrow{a})).$$

Supreendentemente este esquema implica que a hierarquia persiste por um tempo muito longe.

Princípio de Reposição Para todas fórmulas $\phi(x, y, \overrightarrow{z})$ na LTC (com $\overrightarrow{z}$ variáveis livres) temos o seguinte:
$$\forall \overrightarrow{a}\, (\forall u\, \exists! v\, \phi(u, v, \overrightarrow{a}) \longrightarrow \forall x\, \exists y\, \forall z\, (z \in y \longleftrightarrow \exists w \in x\, \phi(w, z, \overrightarrow{a}))).$$

Usando classes como abreviaturas de novo este fala "Se F é uma operação definavel no V então para todos conjuntos x temos que $F|x$"x (a imagem da restrição de F para x) é também um conjunto."

Algumas autores preferem usar o princípio de reposição em vez de Coleção para formular os axiomas de ZF. Eu acho que é melhor usar Coleção (acho mais simples entender que está acontecendo – em parte porque não precisa usar classes para fazer uma abreviatura), mas não faz diferença formalmente pois a reposição segue de coleção e compreensão.

(**Demonstração.** Para cada $\overrightarrow{a}$ o lado esquerda dá para todos x que temos $\forall u \in x\, \exists (!) v\, \phi(u, v, \overrightarrow{a})$. Usando o axioma de coleção temos $\exists s\, \forall u \in x\, \exists v \in s\, \phi(u, v, \overrightarrow{a})$. Mas o y que precisamos é uma subcoleção definível de s e então existe para o axioma de compreensão.

1.8. Algumas noções matemáticas úteis.

Agora podemos introduzir várias nocões úteis, dando definições na LTC delas.

Definição. *Pares ordenados.* $(x, y) = \{\, \{x\}, \{x, y\} \,\}$.

Proposição. (a) Para todos x e y, (x, y) é um conjunto.
(b) Para todos x, y, u e v, $(x, y) = (u, v) \longrightarrow x = u\ \&\ y = v$.

Demonstração. (a) Por o axioma de pares (aplicada três veces).

(b) Por o axioma dá extensãoalidade.

Nota: se $x = y$ a definição da que $(x, x) = \{\{x\}\}$ e temos que verificar este caso também.

Definição. *Produto cartesiano de dois conjuntos.* $x \times y = \{(a, b) \mid a \in x \,\&\, b \in y\}$.

Proposição. Para todos x e y, $x \times y$ é um conjunto.

Demonstração. Para todos x e y, $x \times y$ é uma subcoleção definível de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\bigcup\{x, y\}))$ e então é um conjunto para os axiomas de compreensão, conjuntos de potência, uniões e pares.

Definição. *Relações e funções.* Uma relação no produto $x \times y$ é um subconjunto de $x \times y$, *i.e.*, um componente de $\mathcal{P}(x \times y)$. Então vamos escrever, igualmente, $\mathrm{Rel}(x,y)$ por $\mathcal{P}(x \times y)$ como uma ajuda à lembrança. Funções são algumas relações. A coleção de funções de x para y é ${}^{x}y = \{f \in \mathrm{Rel}(x,y) \mid \forall a \in x \, \exists! b \in y \, (a, b) \in f\}$.

Proposição. Para todos x e y, $\mathrm{Rel}(x, y)$ e ${}^{x}y$ são conjuntos.

(Poderiamos continuar assim, por exemplo definindo $\mathrm{dom}(z) = \{a \mid \exists b \, (a, b) \in z\} \subseteq \bigcup\bigcup z$ e $\mathrm{im}(z) = \{b \mid \exists a \, (a, b) \in z\} \subseteq \bigcup\bigcup z$, e depois provar, dado que $\mathrm{Rel}(z) \longleftrightarrow \forall x \in z \, \exists a, b \, (x = (a, b))$, temos $\mathrm{Rel}(z) \longleftrightarrow z \subseteq \mathrm{dom}(z) \times \mathrm{im}(z)$.)

Vamos falar que $f : x \longrightarrow y$ quando $f \in {}^{x}y$, $\mathrm{dom}(f) = x$ e $\mathrm{im}(f) \subseteq y$. Queriamos usar a notação $f(a)$ quando $f \in {}^{x}y$, $a \in x$ e $(a, b) \in f$. Se estamos juntando um nome por uma função definível para a língua deveríamos dar um sentido para qualquer $f(x)$. Então botamos $f(a) = b$ se $a \in \mathrm{dom}(f)$, e $f(a) = \emptyset$ se $a \notin \mathrm{dom}(f)$. Aqui estamos usando f em dois sentidos, um como o nome de um conjunto (a função de x para y), e o outro como um novo símbolo numa extensão por funções definível para LTC. Logo que precisamos botar $f(a)$ (f no segundo sentido) igual 0 se $a \notin \mathrm{dom}(f)$ (f no primeiro sentido). Na prática rapidamente vemos ignorar estas distinções.

Agora podemos definir injetivo, sobrejetivo e bijetivo for funções $f \in {}^{x}y$, e então podemos escrever o axioma de infinidade por exemplo:

Infinidade. $\exists x \, \forall n \in \omega \neg \exists f \in {}^{x}n \; f$ é bijetivo.

Agora podemos introduzir também o axioma de escolha.

Axioma de Escolha. $\forall x \, ((\forall y \in x \; y \neq \emptyset) \longrightarrow \exists f \in {}^{x}\bigcup x \, \forall y \in x \; f(y) \in y)$.

Isto fala que para todos conjuntos de conjuntos não-vazios tem uma função que escolha um membro de cada um. Não vou falar mas nisso aqui, porque veremos mas sobre este axioma no cápitulo 3.

Outras coisas similares. Podemos fazer algumas outras definições úteis similares. Se I e $\{y_i \mid i \in I\}$ são conjuntos temos:

Produtos cartesianos gerais. $\Pi_{i \in I} y_i = \{f : I \longrightarrow \bigcup\{y_i \mid i \in I\} \mid \forall i \in I \; f(i) \in Y_i\}$.

Uniões disjuntas. $\Sigma_{i \in I} y_i = \{(i, a) \mid a \in y_i\}$. (Às veces pode ver $\dot{\bigcup}_{i \in I} y_i$ em vez de $\Sigma_{i \in I} y_i$.)

Quociente de um conjunto por um relação de equivalência. R é um relação de equivalência no x se R é reflexivo, $\forall y \in x\,(y,y) \in R$, R é simétrico $\forall y,\, z \in x\,(y,z) \in R \longleftrightarrow (z,y) \in R$ e R é transitivo, $\forall w,\, y,\, z \in x\,(w,y) \in R\,\&\,(y,z) \in R \longleftrightarrow (w,z) \in R$. Se R é um relação de equivalência no x temos $x/R = \{\, y \in \mathcal{P}(x) \mid \exists a \in x\, \forall b\,(b \in y \longleftrightarrow (a,b) \in R)\,\}$.

Proposição. Cada $\Pi_{i \in I} y_i$, $\Sigma_{i \in I} y_i$ e x/R é um conjunto.

Teorema. A coleção de todos conjuntos, V, é fechado sob
(i) subconjuntos definíveis,
(ii) uniões,
(iii) produtos indexados por conjuntos,
(iv) uniões disjuntos indexados por conjuntos,
(v) espaços de funções
(vi) conjuntos de potência
(vii) quocientes
e também contem $\mathbf{N}$ – *i.e.*, um objeto $\mathbf{N}$ com uma função $s : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ que satisfaz os aximas de Peano (que dão as regras que esperamos de conduta da função de sucessor nos números naturais).

Usando este teorema podemos construir mais ou menos qualquer objeto matemática (e é facil augmentar a teorema para monstrar como fazer outras consrtuções matemáticas na teoria dos conjuntos). Estes não são coisas muitas grandes como pode ver para os exemplos seguintes.

Podemos definir $+$ e . nos números naturais indutivemente, primeiro $+$: $n + (m+1) = s(n+m)$; e depois .; $n.(m+1) = n.m + n$. Depois pode definir $\mathbf{Z}$ como $\mathbf{N} \times \{0\} \dot{\cup} \{0\} \times \{1\} \dot{\cup} \mathbf{N} \times \{2\}$ ($\subseteq \mathbf{N} \times 3$), com $(i,y) < (j,z)$ se $i < j$, ou $i = j = 0$ e $z < y$, ou $i = j = 2$) e $y < z$, por exemplo. (Mas claro também pode esolhar qualquer outro esquema razoavel.) Pode dar as regras para $+$, . si mesmo. Podemos definir $\mathbf{Q}$ como $\mathbf{Z} \times \mathbf{N} / \sim$ onde $\sim$ é a relação $(a,b) \sim (c,d)$ se $a.d = b.c$. Depois pode definir $\mathbf{R}$ pela cortes de Dedekind. Ou também poderia definir, por exemplo, $\{r \in \mathbf{R} \mid 0 < r < 1\}$ pelo expansões binarias, ou pela frações contínuas e tomar $\mathbf{R} = \mathbf{Z} \times \{r \in \mathbf{R} \mid 0 < r < 1\}$. (Pode achar informação sobre frações contínuas em qualquer livro bom que tratar da teoria elementar dos números, como, por exemplo, Alan Baker, *A Consise Introduction to the Theory of Numbers*, Cambridge University Press, páginas 41-42.) Como pode ver estes construçõs são mais ou menos trivias e também tem muito liberdade em fazer-las