El modelo de base

- Función objetiva del principal: B(x-w)
  - creciente y cóncava: B'>0 y B"≤0
  - x = resultado
  - w = pago al agente
- función objetiva del agente: U(w,e)=u(w)-v(e)
  - creciente y cóncava: u'(w)>0 y u''(w)≤0
  - e=esfuerzo
  - v(e) = desutilidad del esfuerzo
  - v'(e)>0 y v''(e)≥0

El modelo de base

- El esfuerzo del agente influye el resultado:

$$p_i(e) = \mathrm{Prob}[x = x_i | e] > 0 \quad \forall i$$

- el agente tiene una utilidad de reserva: U
- el principal tiene que elegir w para inducir el esfuerzo e que le conviene

El programa con información simétrica

$$\max_{[e,\{w(x_i)\}_{i=1,\dots,n}]} \sum_{i=1}^{n} p_i(e)B(x_i - w(x_i))$$

$$\text{t.q.} \quad \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i(e)u(w(x_i)) - v(e) \geq \underline{U}}_{\textit{Restricción de participación}}$$

Condiciones del primer orden (CPO)

- con respecto a los pagos w: denotamos con λ el multiplicador de Lagrange

$$-p_i(e)B'(x_i - w(x_i)) + \lambda p_i(e)u'(w(x_i)) = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

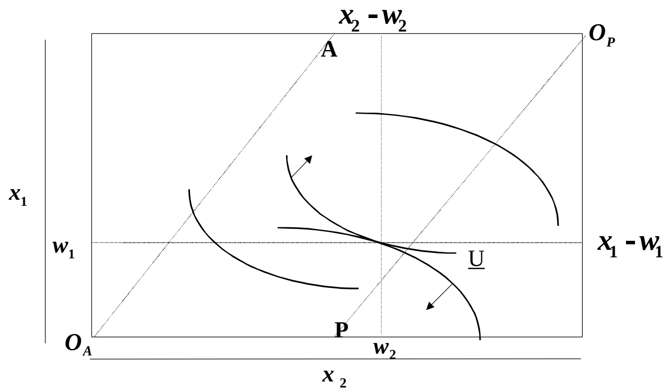
$$\lambda = \frac{B'(x_i - w(x_i))}{u'(w(x_i))} > 0 \quad \forall i \in \{1,2,....,n\}$$

- hay la dificultad que el programa del principal no es necesariamente cóncava con respecto al esfuerzo (distribución del resultado depende del esfuerzo) => CPO sólo necesaria pero no suficiente para cualquier e óptimo interior

El mecanismo de pagos óptimos

- CPO indica:
  - restricción de aceptación está saturada (λ>0): el agente recibe su utilidad de reserva
  - cociente de utilidades marginales es independiente del resultado final: situación eficiente en el sentido de Pareto
- Vamos ilustrar la solución gráficamente con dos resultados posibles utilizando una *caja de Edgeworth*

El mecanismo de pagos óptimos



Actitudes al riesgo

(1) el principal es neutral , el agente averso al riesgo

B'( )=cte. => u'( ) =cte. (por CPO)

- **pago independiente del resultado**
- **el principal lleva todo el riesgo**
- **el principal asegura completamente al agente**
- **nivel del pago:**

$$w = u^{-1}(\underline{U} + v(e))$$

- **utilizando este w el principal encuentra e resolviendo**

$$\max_e \sum_{i=1}^{n} p_i(e)x_i - u^{-1}(\underline{U} + v(e))$$

$$\text{CPO}: \sum_{i=1}^{n} p_i'(e)x_i = (u^{-1})'(\underline{U} + v(e))v'(e) = \frac{v'(e)}{u'(w)}$$

$$\text{CSO}: \sum_{i=1}^{n} p_i''(e)x_i + \frac{u''}{(u')^3}(w)v'(e)^2 - \frac{v''(e)}{u'(w)} \leq 0$$

Derivando y examinando CSO

Para obtener la CSO hay que tener en cuenta:

$$\frac{d}{de}\left[-\frac{v'(e)}{u'(w)}\right] = -\frac{v''(e)}{u'(w)} + \frac{v'(e)u''(w)\frac{dw}{de}}{[u'(w)]^2}$$

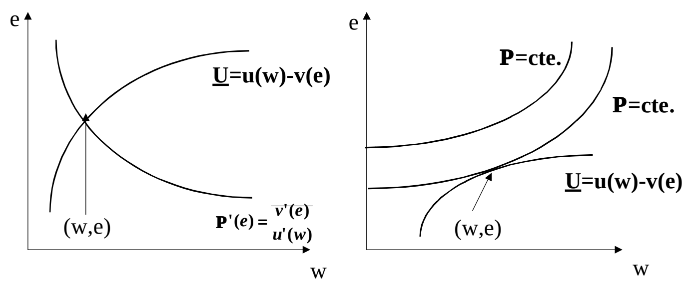
$$\frac{dw}{de} = (u^{-1})'(\underline{U} + v(e))v'(e) = \frac{v'(e)}{u'(w)}$$

$$\Rightarrow \text{CSO}: \sum_{i=1}^{n} p_i''(e)x_i + \frac{u''}{(u')^3}(w)v'(e)^2 - \frac{v''(e)}{u'(w)} \leq 0$$

Condición suficiente para satisfacer CSO:

$$\sum_{i=1}^{n} p''(e)x_i \leq 0$$

Esfuerzo y pago óptimo



Actitudes al riesgo

(2) el principal es averso , el agente neutral al riesgo

u'( )=cte. => B'( ) =cte. (por CPO)

- **beneficio independiente del resultado**
- **el agente lleva todo el riesgo: contrato de franquicia**
- **el agente asegura completamente al principal**
- **pago:** $w(x_i) = x_i - k \quad \text{con} \quad k = \sum_{i=1}^{n} p_i(e)x_i - \underline{U} - v(e)$
- **utilizando este w el principal encuentra e resolviendo**

$$\max_e \sum_{i=1}^{n} p_i(e)x_i - v(e)$$

$$\text{CPO} : \sum_{i=1}^{n} p_i'(e)x_i = v'(e)$$

$$\text{CSO} : \sum_{i=1}^{n} p_i''(e)x_i - v''(e) \leq 0$$

<0 condición suficiente

Actitudes al riesgo

(3) el principal y el agente son aversos al riesgo

$$\text{CPO} : -B'(x_i - w(x_i)) + \lambda u'(w(x_i)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{B'(x_i - w(x_i))}{u'(w(x_i))}$$

Diferenciando CPO con respecto al resultado:

$$-B''\left[1 - \frac{dw}{dx_i}\right] + \lambda u'' \frac{dw}{dx_i} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{B''}{B'}\left[1 - \frac{dw}{dx_i}\right] + \frac{u''}{u'}\frac{dw}{dx_i} = 0$$

Introduciendo el grado de aversión absoluta al riesgo

$$r_p = -\frac{B''}{B'} \qquad \text{principal}$$

$$r_A = -\frac{u''}{u'} \qquad \text{agente}$$

Obtenemos

$$\frac{dw}{dx_i} = \frac{r_p}{r_p + r_A}$$

- **cuanto más averso al riesgo sea el agente menos influirá el resultado al pago**
- **cuanto más averso al riesgo sea el principal más influirá el resultado al pago**